UNE FACTORISATION DE LA COHOMOLOGIE COMPLÉTÉE ET DU SYSTÈME DE BEILINSON-KATO

par

Pierre Colmez & Shanwen Wang

À la mémoire de Joël Bellaïche et Jan Nekovář

Résumé. — Nous montrons que le symbole modulaire $(0, \infty)$, vu comme élément du dual de la cohomologie complétée, interpole en famille le système d'Euler de Kato, et nous en déduisons une factorisation du système de Beilinson-Kato comme un produit de deux symboles $(0, \infty)$ (un avatar algébrique de la méthode de Rankin). La preuve utilise la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et la factorisation d'Emerton de la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires, dont nous donnons une preuve nouvelle reposant sur la construction d'un modèle de Kirillov pour la cohomologie complétée, et que nous raffinons en imposant des conditions aux points classiques ; l'existence d'un tel raffinement traduit une propriété d'analyticité des périodes p-adiques de formes modulaires.

Abstract. — We show that the modular symbol $(0, \infty)$, considered as an element of the dual of Emerton's completed cohomology, interpolates Kato's Euler system at classical points, and we deduce from this a factorisation of Beilinson-Kato's system as a product of two symbols $(0, \infty)$ (an algebraic analog of Rankin's method). The proof uses the p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and Emerton's factorization of the completed cohomology of the tower of modular curves for which we provide a new proof resting upon the construction of a Kirillov model for the completed cohomology, and which we refine by imposing conditions at classical points ; the existence of such a refinement is a manifestation of an analyticity property for p-adic periods of modular forms.

Pendant l'élaboration de cet article, la recherche de S.W. a été subventionnée par the Fundamental Research Funds for the Central Universities, and the Research Funds of Renmin University of China n° 20XNLG04 et the National Natural Science Foundation of China (Grant n° 11971035) ; P.C. était membre des projets ANR Percolator puis Coloss.

Introduction

Le point de départ de cet article était l'espoir que l'on pouvait expliquer l'apparition d'un produit de deux valeurs spéciales de fonctions L dans les formules explicites liées au système d'Euler de Kato (ce produit de deux valeurs est ce qui sort de la méthode de Rankin) par une factorisation du système de Beilinson-Kato comme un produit de deux symboles modulaires $(0,\infty)$, chacun fournissant une des deux valeurs spéciales de fonctions L. C'est ce que nous prouvons, mais cela demande d'interpréter correctement les termes en présence.

0.1. La factorisation de la cohomologie complétée

0.1.1. La cohomologie complétée. — Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathscr{O}_L$ et corps résiduel k_L, et soient $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}^{]\infty[}$, $\mathbf{A}^{]\infty,p[}$) l'anneau des adèles (resp. adèles finis, resp. adèles finis sans la composante p-adique) de $\mathbf{Q}$ et $\widehat{\mathbf{Z}}$, $\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[}$ les anneaux des entiers de $\mathbf{A}^{]\infty[}$, $\mathbf{A}^{]\infty,p[}$. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Notons $\mathbb{G}$ le groupe $\mathbf{GL}_2$ et $(x_v)_v$ les composantes de $x\in\mathbb{G}(\mathbf{A})$ (avec $v\in\mathscr{P}\cup\{\infty\}$). On dispose d'actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ sur les fonctions $\phi:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to L$ définies par

$$(\gamma*\phi)(x)=\phi(\gamma^{-1}x),\ \text{si}\ \gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\quad (g\star\phi)(x)=\phi(xg),\ \text{si}\ g\in\mathbb{G}(\mathbf{A}).$$

Ces deux actions commutent, ce qui fait que, si X est un espace de fonctions stable par ces deux actions, les groupes $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),X)$ sont munis d'une action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$. Parmi les espaces X possibles, mentionnons les espaces $\mathscr{C}\supset\mathscr{C}^{(p)}\supset\mathrm{LA}\supset\mathrm{LP}$, où

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)&:=\{\phi:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to L,\ \phi\ \text{continue}\}\\
\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)&:=\{\phi\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L),\ \phi\ \text{localement lisse pour l'action de}\ \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})\}\\
\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)&:=\{\phi\in\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L),\ \phi\ \text{localement analytique en}\ x_p\}\\
\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)&:=\{\phi\in\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L),\ \phi\ \text{localement algébrique en}\ x_p\}
\end{aligned}$$

Remarque 0.1. — (i) Comme L est totalement discontinu, les ϕ ci-dessus se factorisent par $\mathbb{G}(\mathbf{A})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$, où $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ est la composante connexe de $1\in\mathbb{G}(\mathbf{R})$; la composante archimédienne n'intervient donc qu'à travers le groupe de ses composantes connexes $\{\pm1\}$.

Il s'ensuit que les H^0 ne sont pas des groupes très passionnants car une fonction invariante par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{R})^+$ se factorise par le déterminant (plus exactement, par $\mathbf{A}^{]\infty[,*}/\mathbf{Q}^*\mathbf{R}_+^*\cong\widehat{\mathbf{Z}}^*$). Par contre les H^1 sont des groupes très intéressants, et les H^i, pour $i\geq2$, sont nuls.

(ii) Soit $\Gamma:=\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Le lemme de Shapiro fournit un isomorphisme

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))\cong H^1(\Gamma,\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L))=L\otimes_{\mathscr{O}_L}H^1(\Gamma,\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L))$$

Par ailleurs,

$$\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L)=\varinjlim_{(N,p)=1}\varprojlim_k\big(\varinjlim_n\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/Np^n),\mathscr{O}_L/p^k)\big)$$

et le lemme de Shapiro, couplé avec les théorèmes de comparaison “cohomologie du π_1-Betti” et “Betti-étale”, fournit des isomorphismes

$$H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/Np^n), \mathscr{O}_L/p^k)) \cong H^1_{\rm B}(Y(Np^n)(\mathbf{C}), \mathscr{O}_L/p^k) \cong H^1_{\rm \acute{e}t}(Y(Np^n)_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathscr{O}_L/p^k)$$

où $Y(M)$ est la courbe modulaire de niveau M (connexe sur $\mathbf{Q}$ mais pas géométriquement connexe). Cela munit les H^1 d'une action de $G_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et permet de montrer que $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ est la cohomologie complétée d'Emerton **[25]**.

(iii) On a aussi, si C est un corps algébriquement clos, complet pour la valuation p-adique,

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)) \cong H^1_{\rm proet}(\widehat{Y}(0)_C, \mathscr{O}_L)$$
$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)) \cong H^1_{\rm proet}(\widehat{Y}(0)^{(p)}_C, \mathscr{O}_L)$$

où $H^1_{\rm proet}(\widehat{Y}(0)_C, \mathscr{O}_L)$ est la cohomologie proétale géométrique de la courbe perfectoïde $\widehat{Y}(0)$ obtenue en complétant la tour des courbes modulaires de tous niveaux **[62]** tandis que $\widehat{Y}(0)^{(p)}$ est la limite projective pour $(N,p) \neq 1$ des $\widehat{Y}(Np^\infty)$, où $\widehat{Y}(Np^\infty)$ est la complétée de la tour des courbes modulaires de niveaux Np^n, pour $n \in \mathbf{N}$ (i.e. on complète uniquement en p). Cette interprétation, qui nous sera très utile, a déjà été utilisée avec profit par Pan **[51]**.

(iv) On peut montrer que $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ est l'ensemble des vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$-lisses de $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ (ce n'est pas une tautologie : le même énoncé pour la restriction des scalaires de K à $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{GL}_1$ équivaut à la conjecture de Leopoldt pour K).

(v) On a $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)) = L \otimes H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}))$ et la théorie d'Eichler-Shimura exprime $\mathbf{C} \otimes H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}))$ en termes de formes modulaires classiques. De manière analogue :

- Les espaces $\mathbf{C}_p \widehat{\otimes}_L H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ et $\mathbf{C}_p \widehat{\otimes}_L H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ sont reliés aux formes modulaires p-adiques (cf. th. 0.7 pour un tel lien).
- $\mathbf{C}_p \widehat{\otimes}_L H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ est relié aux formes modulaires p-adiques surconvergentes **[51, 52]**.

0.1.2. Le module $H^1[\rho_T]$. — Notons $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_\ell$. On fixe un plongement $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, et donc une injection $G_{\mathbf{Q}_\ell} \hookrightarrow G_{\mathbf{Q}}$.

Fixons N premier à p. Soient

$$\widehat{\Gamma}(Np^\infty) := \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \cap (1 + N\mathbf{M}_2(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[}))$$
$$\widehat{H}^1(N) := H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty), \mathscr{O}_L)) \subset H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$$

(On a aussi $\widehat{H}^1(N) = H^1_{\rm pro\acute{e}t}(\widehat{Y}(Np^\infty)_C, \mathscr{O}_L)$, et $\widehat{H}^1(N)$ est stable par $G_{\mathbf{Q}}$.)

On note $T(Np^\infty)$ l'algèbre de Hecke agissant sur $\widehat{H}^1(N)$ (engendrée par les opérateurs de Hecke T_ℓ, pour $\ell \nmid Np$) ; c'est une algèbre semi-locale. On fixe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $T(Np^\infty)$ et on note T le localisé $T(Np^\infty)_\mathfrak{m}$; c'est une algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et, quitte à agrandir L, on peut supposer que $T/\mathfrak{m} = k_L$. Soit

$$\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(T)(\mathscr{O}_{\overline{L}})$$

On dispose d'un pseudo-caractère $t_\mathfrak{m} : G_\mathbf{Q} \to T$, de dimension 2. On suppose que $\mathfrak{m}$ est *non-eisenstein* (i.e. la réduction modulo $\mathfrak{m}$ de $t_\mathfrak{m}$ est la trace d'une représentation absolument irréductible) ; il existe alors une représentation $\rho_T : G_\mathbf{Q} \to \mathbf{GL}_2(T)$ dont la trace est $t_\mathfrak{m}$.

Si $x \in \mathscr{X}$, on note $\mathfrak{p}_x$ l'idéal premier de T qui lui correspond et ρ_x la spécialisation de ρ_T en x (i.e. la représentation $(T/\mathfrak{p}_x)[\frac{1}{p}] \otimes_T \rho_T$). On dit que x *est classique*, si ρ_x est la représentation associée à une forme modulaire f primitive de poids ≥ 2 à torsion près par une puissance entière du caractère cyclotomique. Les points classiques sont zariski-denses dans la fibre générique de $\mathscr{X}$.

Soient S l'ensemble des nombres premiers divisant Np et $G_{\mathbf{Q},S}$ le groupe de Galois de l'extension maximale de $\mathbf{Q}$, non ramifiée en dehors de S. Alors ρ_T se factorise à travers $G_{\mathbf{Q},S}$ et, si N est suffisamment divisible par les $\ell \in S \setminus \{p\}$, les théorèmes « big R = big T » identifient T à l'anneau des déformations universelles de $\overline{\rho}_T$ et $\rho_T : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathbf{GL}_2(T)$ à la déformation universelle (cf. **[6]** et **[27**, § 7.3]).

Le localisé $\widehat{H}^1(N)_\mathfrak{m}$ de $\widehat{H}^1(N)$ est un facteur direct de $\widehat{H}^1(N)$. On note $H^1[\rho_T]$ le sous-$T[\mathbb{G}(\mathbf{A})]$-module de $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)$ qu'il engendre. On cherche à décrire $H^1[\rho_T]$ en tant que $T[G_\mathbf{Q} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-module.

0.1.3. La factorisation. — Soit $\rho_T^\diamond = \mathrm{Hom}_T(\rho, T)$. Via les correspondances de Langlands locales p-adiques en famille, on sait associer à $\rho_T^\diamond$, pour tout $\ell \in \mathscr{P}$, une T-représentation $\Pi_\ell(\rho_T^\diamond)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$:

- Si $\ell \neq p$, la représentation que nous utilisons est une variante de celle fournie par la théorie d'Emerton-Helm **[28]** ; c'est un T-module sans torsion, muni d'une action lisse de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$, et si $x \in \mathscr{X}$, alors $(T/\mathfrak{p}_x) \otimes_T \Pi_\ell(\rho_T^\diamond)$ est (génériquement) un réseau de $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_x^*)$, où $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_x^*)$ est la représentation lisse de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ associée à ρ_x^* via la correspondance de Langlands locale classique.

- Si $\ell = p$, l'existence de $\Pi_p(\rho_T^\diamond)$ est une conséquence de la fonctorialité de la correspondance de Langlands locale p-adique **[13, 43, 53]**. La représentation $\Pi_p(\rho_T^\diamond)$ est la boule unité d'un L-banach, et est munie d'une action continue de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$. En tant que T-module, c'est un T-module « de torsion » au sens où la T-torsion est dense dans $\Pi_p(\rho_T^\diamond)$ (si $x \in \mathscr{X}$, le sous-module de $\mathfrak{p}_x$-torsion de $\Pi_p(\rho_T^\diamond)$ s'identifie à un réseau de $\Pi_p(\rho_x^*)$, où $\Pi_p(\rho_x^*)$ est la représentation unitaire de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ associée à ρ_x^* via la correspondance de Langlands locale p-adique).

On définit $\Pi(\rho_T^\diamond)$ comme le produit tensoriel extérieur restreint des $\Pi_\ell(\rho_T^\diamond)$, pour $\ell \in \mathscr{P}$. Si x n'est pas trop pathologique (n° 3.1.2 et th. 3.34), alors

$$\big(L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi(\rho_T^\diamond)\big)[\mathfrak{p}_x] \cong \Pi_p(\rho_x^*) \otimes \big(\otimes'_{\ell \neq p} \Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_x^*)\big)$$

La représentation ρ_T n'est bien déterminée qu'à multiplication près par une unité de T, mais la fonctorialité de la correspondance de Langlands locale p-adique et le passage au dual font que $\rho_T \otimes_T \Pi_p(\rho_T^\diamond)$ ne dépend pas du choix de ρ_T (de la même manière que $\rho_T^\diamond \otimes_T \rho_T = \mathrm{End}_T(\rho_T)$ n'en dépend pas).

Théorème 0.2. — *Si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, il existe un isomorphisme naturel, $T[G_{\mathbf{Q},S} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-équivariant :*

$$\iota_T : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond)[\tfrac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^1[\rho_T]$$

Remarque 0.3. — (i) Si $\mathfrak{m}$ est *générique* (i.e. non-eisenstein et la restriction de $\overline{\rho}_T$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ pas de la forme [1] $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$), nous obtenons un isomorphisme au niveau entier :

$$\iota_T : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond) \xrightarrow{\sim} H^1[\rho_T]$$

Si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein et si la restriction de $\overline{\rho}_T$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$, Emerton [**27**, th. 6.2.13] a montré l'existence d'un isomorphisme "abstrait" au niveau entier entre les deux membres à ceci près que notre action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et celle d'Emerton diffèrent de $g \mapsto {}^t g^{-1}$, et donc que le membre de gauche est $\rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T)$ chez Emerton.

(ii) Notre preuve est très différente de celle d'Emerton et fournit un isomorphisme bien déterminé. Elle repose sur la construction de modèles de Kirillov pour les deux membres, à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{T} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-)$, où $\check{T} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(T, \mathscr{O}_L)$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^- = \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^+$, avec $\widetilde{\mathbf{A}} = W(C^\flat)$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\mathscr{O}_C^\flat)$ (l'apparition de $\widetilde{\mathbf{A}}^-$ est un peu surpenante vu qu'il n'entre nulle part dans la définition des deux membres ; voir les n$^{\text{os}}$ 0.2.1 et 0.2.2 pour les détails de cette apparition). Une fois ces modèles de Kirillov construits, la stratégie consiste à prouver que :

• $\mathscr{K}_{\mathrm{Aut}} : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{T} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-)$ est une isométrie sur son image (quasi-tautologique vu la définition de $\Pi(\rho_T^\diamond)$).

• (dans le cas générique) $\mathscr{K}_H : H^1[\rho_T] \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{T} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-)$ est une isométrie sur son image (délicat : utilise de la théorie de Hodge p-adique entière et des théorèmes de multiplicité 1 modulo p qui font défaut dans le cas non générique — la preuve de ce cas (th. 13.13) est plus alambiquée et donne un résultat moins précis, i.e. on est forcé d'inverser p).

• Les images des vecteurs localement algébriques des deux membres sont les mêmes (cf. diag. (0.9), qui repose sur des formules explicites pour les théorèmes de comparaisons "de Rham-étale p-adique" pour les formes modulaires).

On conclut alors en utilisant la densité des vecteurs localement algébriques des deux membres.

1. Si $p = 2$, il faut aussi supposer que cette restriction n'est pas irréductible, mais cette condition doit pouvoir s'éliminer avec un peu plus d'efforts.

Remarque 0.4. — (i) On déduit du théorème, pour $x \in \mathscr{X}$ pas trop pathologique, un isomorphisme naturel :

$$\rho_x \otimes \big(\Pi_p(\rho_x^*) \otimes \big(\otimes'_{\ell\neq p} \Pi_\ell^{\rm cl}(\rho_x^*)\big)\big) \xrightarrow{\sim} (L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^1[\rho_T])[\mathfrak{p}_x]$$

qui a pour conséquence l'énoncé suivant, peut-être plus parlant :

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(\rho_x, L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C^{(p)}, \mathscr{O}_L)) \cong \Pi_p(\rho_x^*) \otimes \big(\otimes'_{\ell\neq p} \Pi_\ell^{\rm cl}(\rho_x^*)\big) \tag{0.5}$$

(ii) Selon la conjecture de compatibilité local-global d'Emerton [**26**, conj. 1.1.1] l'isomorphisme (0.5) devrait être valable pour toute représentation de dimension 2 de $G_{\mathbf{Q}}$, impaire, absolument irréductible, non ramifiée en dehors d'un nombre fini de nombres premiers.

0.2. Modèles de Kirillov

0.2.1. Le modèle de Kirillov de la cohomologie complétée. — Le modèle de Kirillov $\mathscr{K}_H$ pour $H^1[\rho_T]$ est la restriction d'un modèle de Kirillov pour $H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C, \mathscr{O}_L) = \mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C, \mathbf{Z}_p)$. On note $\mathbb{T}$ l'algèbre de Hecke qui agit : c'est la limite projective des algèbres de Hecke de tous les niveaux finis et elle agit à travers son quotient T sur $H^1[\rho_T]$.

On construit le modèle de Kirillov pour $H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C, \mathbf{Z}_p)$ en restreignant les classes de cohomologie à une composante connexe du voisinage multiplicatif $\widehat{Z}(0)_C$ de la pointe ∞ – une boule ouverte perfectoïde – et en utilisant une description de la cohomologie proétale de la boule ouverte perfectoïde (formules (8.8) et (8.9)).

La boule ouverte est une réunion croissante de boules fermées et, si B_∞ est une boule fermée perfectoïde, on a $H^1_{\text{proét}}(B_\infty, \mathbf{Z}_p) \cong W((\mathscr{O}(B_\infty)^\flat)/(\varphi-1)$. Le membre de droite se calcule facilement et fournit, en passant à la limite, une injection naturelle [2] de la cohomologie proétale de la boule ouverte perfectoïde dans $\prod_{i>0,\, v_p(i)=0} \widetilde{\mathbf{A}}^- \tilde{q}^i$ où $\tilde{q} = [q^\flat]$ et q est la coordonnée locale usuelle sur le lieu multiplicatif de la courbe modulaire de niveau 1.

En prenant le terme correspondant à $i = 1$, composé avec la restriction au voisinage de la pointe ∞, cela fournit une flèche naturelle $\alpha : H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C, \mathbf{Z}_p) \to \widetilde{\mathbf{A}}^-$; c'est de là que sort le $\widetilde{\mathbf{A}}^-$. Ensuite, on pose

$$\langle \mathscr{K}_{H,v}(x), \lambda\rangle = \alpha(\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot \lambda v), \quad \text{si } v \in H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C, \mathbf{Z}_p), \text{ si } x \in \mathbf{A}^{]\infty[,*} \text{ et si } \lambda \in \mathbb{T}.$$

Ce modèle de Kirillov n'est que $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant car le voisinage multiplicatif de ∞ n'est défini que sur $\mathbf{Q}_p$.

Remarque 0.6. — (i) Le point délicat est de prouver que ce modèle de Kirillov est injectif sur $H^1[\rho_T]$ (après avoir symétrisé sous l'action de $G_{\mathbf{Q}}$ pour perdre le moins d'information possible). Nous utilisons deux approches de domaines de validité différents :

2. Ceci demande que C soit sphériquement complet.

• La première approche utilise la théorie de Hodge p-adique entière, et permet de prouver l'injectivité en restriction au localisé en un idéal maximal générique (et même mieux, on obtient une isométrie sur l'image (th. 10.1) comme il est mentionné ci-dessus).

• La seconde approche utilise la description des vecteurs $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$-invariants de $C\widehat{\otimes}H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0),\mathbf{Z}_p)$ (ce groupe peut se calculer en termes de la cohomologie proétale du faisceau $\widehat{\mathscr{O}}$ grâce au théorème de comparaison primitif de Scholze [**62**, th. IV.2.1], ce qui est aussi le point de départ des travaux de Pan [**51, 52**] dont nous nous sommes inspirés). Cette seconde approche permet (th. 11.9) de prouver l'injectivité sur tout sous-espace fermé W, stable par $\mathbb{T}$, $G_{\mathbf{Q}}$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, tel que $W[\mathfrak{p}_x]\neq 0$ implique que ρ_x est irréductible et l'opérateur de Sen de la restriction de ρ_x à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas scalaire. (On peut supprimer cette dernière condition par "prolongement analytique", cf. preuve du th. 13.13.)

Un sous-produit de la seconde approche est le théorème de décomposition de Hodge-Tate suivant (th. 11.2, prop. 11.6 et rem. 11.7) inspiré par les travaux de Pan [**51**] et Howe [**40**]. Soient $U=\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $B=\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p\\ 0 & \mathbf{Z}_p^*\end{smallmatrix}\right)$. On note $\widehat{\mathrm{Ig}}(0)$ la complétion de la tour d'Igusa de tous niveaux. L'espace $\mathscr{O}(\widehat{\mathrm{Ig}}(0)/U)_\kappa$ qui apparaît dans le théorème ci-dessous est l'espace des formes modulaires p-adiques de poids κ.

Théorème 0.7. — *On a une suite exacte $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty,p[})\times B(\mathbf{Z}_p)\times G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante :*

$$0\to H^1(\widehat{Y}(0)_C/U)\to C\widehat{\otimes}H^1_{\text{proét}}(\widehat{Y}(0)_C,\mathbf{Z}_p))^U\to\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(0)_C^\times/U)(-1)\to 0$$

De plus, si κ est un caractère continu de B, avec $\kappa\big(\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\big)=\kappa_1(a)\kappa_2(d)$, et si on passe aux vecteurs κ isotypiques, la suite reste exacte et l'opérateur de Sen sur le membre de gauche (*resp. de droite*) *est la multiplication par $-w(\kappa_2)$* (*resp.* $-1-w(\kappa_1)$).

Remarque 0.8. — (i) L'injectivité du modèle de Kirillov pour $H^1[\rho_T]$, couplée aux propriétés de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, permet de prouver *directement* un certain nombre de résultats qu'Emerton déduit de sa factorisation de la cohomologie complétée (comme la compatibilité avec la correspondance de Langlands locale classique [**27**, § 7.4] ou la conjecture de Fontaine-Mazur pour les représentations pro-modulaires [**27**, th. 7.1.1], cf. th. 12.6 et 12.8).

(ii) L'approche d'Emerton fait grand usage d'un résultat de Berger-Breuil [**4**], spécifique à $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, à savoir l'irréductibilité, si ρ est cristalline à poids de Hodge-Tate distincts, du complété universel de la représentation localement algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ associé à ρ par la correspondance classique (modifiée pour encoder les poids de Hodge-Tate). Par contraste, notre preuve de la factorisation de la cohomologie complétée n'utilise pas cette irréductibilité.

0.2.2. Le modèle de Kirillov de $\rho_T\otimes_T\Pi(\rho_T^\diamond)$. — Il est clair que $\widetilde{\mathbf{A}}^-$ ne peut sortir que de $\Pi_p(\rho_T)$ car si $\ell\neq p$, $\Pi_\ell(\rho_T)$ est, par construction, un sous-module de

$\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*, \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}] \otimes_{\mathbf{Z}} T)$, où LC désigne l'espace des fonctions localement constantes (i.e. on identifie $\Pi_\ell(\rho_T)$ a son image par le modèle de Kirillov $\mathscr{K}_\ell : \Pi_\ell(\rho_T) \to \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*, \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}] \otimes_{\mathbf{Z}} T))$.

Maintenant, si V est une représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, et si $\Pi_p(V)$ est la représentation unitaire de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ qui lui est associée, on a une suite exacte $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante [**13**, cor. II.2.9]

$$0 \to (\widetilde{\mathbf{A}} \otimes V)^H / (\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes V)^H \to \Pi_p(V) \to J(V) \to 0$$

où $J(V)$ est de dimension finie et fixe par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (un analogue p-adique du module de Jacquet). Le membre de gauche s'injecte dans $(\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes V)^H$, et on montre (prop. 2.12) que cette injection s'étend de manière unique $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante à $\Pi_p(V)$. Cela fournit une injection naturelle $\Pi_p(\rho_T^\diamond) \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \rho_T^*$, où ρ_T^* est le $\mathscr{O}_L$-dual de ρ_T (ce passage du T-dual au $\mathscr{O}_L$-dual est dû à la manière dont on définit Π_p).

On en déduit une flèche naturelle $\beta : \rho_T \otimes \Pi_p(\rho_T^\diamond) \to \widetilde{\mathbf{A}}^-$, puis un modèle de Kirillov $v \mapsto \mathscr{K}_{p,v}$ pour $\rho_T \otimes \Pi_p(\rho_T^\diamond)$, à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \check{T})$ en posant

$$\langle \mathscr{K}_{p,v}(x), \lambda \rangle = \beta\big(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \lambda v\big), \quad \text{si } x \in \mathbf{Q}_p^* \text{ et si } \lambda \in T.$$

Le modèle de Kirillov $\mathscr{K}_{\mathrm{Aut}}$ est obtenu en prenant le produit tensoriel extérieur restreint des $\mathscr{K}_\ell$ puis en prenant un réseau bien choisi (on demande que la réduction modulo $\mathfrak{m}_L$ ait un socle générique et irréductible).

0.2.3. Les vecteurs localement algébriques. — Emerton [**25**, (4.3.4)], [**26**, th. 7.4.2], a prouvé que les vecteurs algébriques de la cohomologie complétée proviennent de formes modulaires classiques : on a

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))^{\mathrm{alg}} = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$$

Il a aussi prouvé que les vecteurs $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-algébriques sont denses [**27**, prop. 5.4.1] (voir aussi la prop. 4.20) ; c'est aussi le cas des vecteurs localement algébriques de poids fixé.

Soit π une L-représentation localement algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, absolument irréductible, telle que

$$m_{\text{ét}}(\pi) := \mathrm{Hom}(\pi, H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)))$$

soit non nul (si π n'est pas de la série principale, c'est une L-représentation de $G_{\mathbf{Q}}$, de dimension 2 ; il y a une bijection entre l'ensemble des π comme ci-dessus et celui des twists $f \otimes \mathbf{Z}(j)$ des formes modulaires primitives, les séries d'Eisenstein correspondant aux π de la série principale).

La compatibilité entre les correspondances de Langlands locales classique et p-adique et un théorème de Carayol [**8**] fournissent un isomorphisme abstrait $\pi \cong \Pi(m_{\text{ét}}(\pi)^*)^{\mathrm{alg}}$, si $m_{\text{ét}}(\pi)$ est de dimension 2. On peut fixer cet isomorphisme en utilisant un générateur naturel ι_{dR}^- du second terme du gradué de $D_{\mathrm{dR}}(m_{\text{ét}}(\pi)^*)$ fourni par le théorème de comparaison pour les formes modulaires et la dualité avec le premier terme du gradué pour la représentation duale (cf. n° 7.2.8), ainsi que la description du modèle de Kirillov des vecteurs localement algébriques de $\Pi_p(V)$ si V est de Rham (n° 2.3.1 et formule (2.9)).

Par ailleurs, si $m^0_{\text{ét}}(\pi)$ est un réseau de $m_{\text{ét}}(\pi)$ obtenu par spécialisation de ρ_T, alors $m^0_{\text{ét}}(\pi)\otimes\Pi(m^0_{\text{ét}}(\pi)^*)$ s'injecte naturellement dans $\rho_T\otimes_T\Pi(\rho_T^\diamond)$ (ici encore, $\rho_T\to m^0_{\text{ét}}(\pi)$ n'est défini qu'à L^* près mais cette indétermination disparaît quand on combine $m^0_{\text{ét}}(\pi)$ et $\Pi(m^0_{\text{ét}}(\pi)^*)$). On a alors un diagramme commutatif

(0.9)
$$\begin{tikzcd}
m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\pi \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\iota_{\text{dR}}^-"] & L\otimes_{\mathscr{O}_L} H^1[\rho_T] \arrow[r, "\mathscr{K}_H"] & L\otimes_{\mathscr{O}_L}\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes\check{T}) \\
m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\Pi(m_{\text{ét}}(\pi)^*) \arrow[rr, hook] & & L\otimes_{\mathscr{O}_L}(\rho_T\otimes_T\Pi(\rho_T^\diamond)) \arrow[u, "\mathscr{K}_{\text{Aut}}"']
\end{tikzcd}$$

La preuve de la commutativité de ce diagramme combine une loi de réciprocité explicite locale (th. 8.14) et des ingrédients de la preuve de la conjecture C_{dR} pour les formes modulaires (th. 13.3 et 13.7).

0.3. Interpolation des éléments de Kato

0.3.1. Élément de Kato et symboles modulaires. — On suppose maintenant que $\mathfrak{m}$ est générique pour pouvoir disposer de l'isomorphisme du th. 0.2 au niveau entier. (Le th. 0.10 ci-dessous est valable, plus généralement, sous l'hypothèse que ρ est Π_p-compatible (cf. n° 14.3.3), qui inclut le cas $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ irréductible, sans restriction sur la représentation résiduelle.)

Si $x\in\mathscr{X}$ est classique, Kato [**42**, th. 12.5] a construit un élément

$$\mathbf{z}_{\text{Iw}}(\rho_x)\in\rho_x^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},\Lambda\otimes\rho_x),$$

où $\Lambda=\mathbf{Z}_p[[\text{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q})]]$ est l'algèbre d'Iwasawa. Cet élément est complètement déterminé par son image par la localisation loc_p en p (i.e. sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$) qui, elle-même, est déterminée par les exponentielles duales de ses spécialisations aux caractères localement algébriques de $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q})$ dans la « bande critique », et ces exponentielles duales font intervenir les valeurs spéciales de la fonction L de f et de ses tordues par des caractères de Dirichlet.

Le symbole modulaire $(0,\infty)$, vu comme élément du dual de la cohomologie complétée [(3)], produit [(4)] un élément de $\rho_x^*\otimes\Pi_p^*(\rho_x^*)$ qui est invariant par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$. De plus, l'évaluation de $(0,\infty)$ sur les vecteurs localement algébriques de $\Pi_p^*(\rho_x^*)$ produit des valeurs spéciales de la fonction L de f et de ses tordues (cf. [**24**] ou prop. 14.5 et n° 14.2.2 ci-après).

---

3. C'est en fait un élément du dual de la cohomologie complétée à support compact mais comme on localise en un idéal non-eisenstein, cela revient au même.

4. On évalue $(0,\infty)$ sur $\rho_x\otimes v^{]p[}\otimes\Pi_p(\rho_x^*)$ où $v^{]p[}$ est le produit tensoriel des nouveaux vecteurs normalisés en les $\ell\neq p$.

Soit $D(\rho_x)$ le (φ,Γ)-module associé à ρ_x (ou plutôt sa restriction $\rho_{x,p}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$) par l'équivalence de catégories de Fontaine [**32**]. On dispose [**10, 13, 15**] d'isomorphismes (où ζ_{B} est un générateur privilégié du twist de Tate $\mathbf{Z}(1)$) :

$$\Pi_p^*(\rho_x^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=1} \cong D(\rho_x(1))^{\psi=1} \cong H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\otimes\rho_x(1)) = H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\otimes\rho_x)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}.$$

Comme $(0,\infty)$ est invariant par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, cela fournit :

$$\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_x)\in\rho_x^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\otimes\rho_x)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}.$$

Théorème 0.10. — *Si $x\in\mathscr{X}$ est classique, alors*

$$\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)) = \mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_x)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}.$$

Remarque 0.11. — (i) Si $\rho_{x,p}$ est absolument irréductible, ce résultat est une conséquence directe de la comparaison des formules faisant intervenir les valeurs spéciales de fonctions L sus-mentionnées et de la formule de la prop. 2.10 (qui résulte de [**13**, prop. VI.5.12] ou [**15**, prop. 2.13]) qui relie exponentielles duales de spécialisations de $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_x)$ et évaluations de $(0,\infty)$ sur les vecteurs localement algébriques. Cela a aussi été remarqué par Yiwen Zhou [**69**].

(ii) Si $\rho_{x,p}$ est une extension de deux caractères, le résultat s'obtient par « prolongement analytique » grâce au th. 0.12 ci-dessous.

(iii) On peut utiliser l'équation fonctionnelle de $(0,\infty)$ pour en déduire une équation fonctionnelle pour l'élément de Kato (th. 14.23, extension de [**47**, th. 4.7] au cas où $\rho_{x,p}$ n'est pas nécessairement absolument irréductible).

0.3.2. Interpolation en famille. — Comme ci-dessus, la forme linéaire $(0,\infty)\circ\iota_T$ sur [5] $\rho_T(-1)\otimes\Pi_p(\rho_T^\diamond(1))$ est invariante par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et donc donne naissance à

$$\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_T)\in\rho_T^\diamond\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}.$$

Notons que, si x est classique, la spécialisation de $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_T)$ en x n'est autre que $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_x)$; autrement dit, $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_T)$ interpole les $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_x)$, pour $x\in\mathscr{X}$ classique.

Théorème 0.12. — (i) *Si $\mathfrak{m}$ est générique, il existe*

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)\in\rho_T^\diamond\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T),$$

unique, tel que $\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)) = \mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_T)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}$.

(iii) *Si x est classique, la spécialisation de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ en x est $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$. Autrement dit, $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ interpole les éléments de Kato.*

Remarque 0.13. — (i) La construction de l'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ se fait en deux temps. On commence par construire $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ dans $\mathrm{Fr}(T)\otimes_T\big(\rho_T^\diamond\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T)\big)$, cf. chap. 15, puis on supprime les dénominateurs (th. 17.10).

5. Plus précisément, sur $\rho_T(-1)\otimes v^{]p[}\otimes\Pi_p(\check\rho_T(1))$ où $v^{]p[}$ est un élément bien choisi de $\otimes_{\ell\neq p}\Pi_\ell(\check\rho_T(1))$, cf. n° 15.2.1 (cet élément dépend en fait de S de manière simple).

(ii) L'idée de la construction est d'utiliser le fait qu'on sait, grâce au th. 0.10, que les spécialisations aux points classiques de $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_T)$ proviennent de classes globales. On peut espérer en déduire, via la suite exacte de Poitou-Tate et la zariski-densité des points classiques, que $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\rho_T)$ lui-même provient d'une classe globale (l'unicité résulte formellement des résultats de Kato).

• Si $H^2(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_x)$ est de type fini sur $\mathbf{Z}_p$ (condition $\mu = 0$), cette stratégie marche parfaitement car les obstructions éventuelles s'annulent (§ 15.6).

• Sans l'hypothèse $\mu = 0$, tout ce qu'on obtient par cette méthode (§ 15.7) est que l'obstruction est de T-torsion, ce qui explique l'introduction de $\mathrm{Fr}(T)$.

(iii) L'élimination des dénominateurs utilise la factorisation du système des éléments de Beilinson-Kato du th. 0.14 (cf. (iii) de la rem. 0.15).

(iv) On peut se demander s'il n'y aurait pas une preuve plus directe du fait que $(0,\infty)$ fournit une classe de cohomologie globale : dans l'état, cela utilise les résultats de Kato sur la théorie d'Iwasawa des formes modulaires, ceux d'Emerton sur la factorisation de la cohomologie complétée, ainsi que des propriétés fines de la correspondance de Langlands locale p-adique.

(v) La même méthode construit un système d'Euler dont $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ est la base.

(vi) Nakamura [**48**] construit directement un élément $\mathbf{z}'_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ qui interpole les éléments de Kato en les points classiques à partir de la factorisation du système des éléments de Beilinson-Kato. Cette propriété d'interpolation et la zariski-densité des points classiques impliquent que son élément coïncide avec le notre.

0.4. Factorisation du système de Beilinson-Kato

0.4.1. Le système de Beilinson-Kato. — Le système de Beilinson-Kato [**42, 11, 65**] est un élément

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} \in H^2(\Pi_{\mathbf{Q}}, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), \mathbf{Q}_p)(2))$$

construit à partir des unités des Siegel. Dans le membre de droite,

• $\mathbf{A}^{]\infty[} = \mathbf{Q} \otimes \widehat{\mathbf{Z}}$ est le groupe des adèles finies de $\mathbf{Q}$,

• $\mathbf{M}'_2$ est l'ensemble des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec $\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

• $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), \mathbf{Q}_p)$ est l'ensemble des distributions algébriques, i.e. des formes linéaires sur l'espace $\mathrm{LC}_c(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}))$ des fonctions localement constantes à support compact dans $\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[})$,

• $\Pi_{\mathbf{Q}}$ est le groupe fondamental arithmétique de la courbe modulaire $Y(1)/\mathbf{Q}$ (vue comme un champs algébrique : on a une suite exacte $1 \to \widehat{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})} \to \Pi_{\mathbf{Q}} \to G_{\mathbf{Q}} \to 1$, où $\widehat{\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})}$ est le complété profini de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $G_{\mathbf{Q}}$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$).

Si $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}))$, il existe N tel que ϕ soit fixe par $\widehat{\Gamma}(N)$ et alors le cup-produit de $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ et ϕ fournit un élément

$$\int \phi\, \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} \in H^2_{\mathrm{\acute{e}t}}(Y(N)_{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)}, \mathbf{Q}_p(2)) \cong H^1(G_{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_N)}, H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(Y(N)_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p(2))),$$

le dernier isomorphisme provenant de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Autrement dit, $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ est une machine à produire des classes de cohomologie galoisienne vérifiant des relations de distribution, à valeurs dans la cohomologie étale géométrique des courbes modulaires.

Maintenant, on peut multiplier $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ par un opérateur $B_p^{c,d}$, avec $c, d \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, de manière à supprimer les dénominateurs (i.e. remplacer $\mathbf{Q}_p(2)$ par $\mathbf{Z}_p(2)$, ce qui fournit des mesures au lieu de distributions algébriques, et donc permet d'intégrer des fonctions continues et pas seulement localement constantes) ; cela introduit des facteurs parasites simples dans les formules.

Si S est un ensemble fini de nombres premiers contenant p, on peut se restreindre aux fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\mathbf{M}_2(\widehat{\mathbf{Z}}]S[)} \otimes \phi_S$, où $\widehat{\mathbf{Z}}^{]S[} = \prod_{\ell\notin S} \mathbf{Z}_\ell$, et ϕ_S est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$, avec $\mathbf{Q}_S = \prod_{\ell\in S} \mathbf{Q}_\ell$. Cela fournit

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d} \in H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \widehat{H}^1_S(2)),$$

où $\widehat{H}^1_S = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]), \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$, et $\widehat{H}^1_S(2)$ est le dual de Tate de $\widehat{H}^1_{c,S}$, où

$$\widehat{H}^1_{c,S} := H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\tfrac{1}{S}]), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$$

est la cohomologie complétée de la tour des formes modulaires de niveaux divisibles par les $\ell \in S$.

0.4.2. La factorisation. — On note T' l'algèbre de Hecke correspondant à la représentation $\rho_T^\diamond(2)$, et on pose $\mathscr{X}' = \mathrm{Spec}(T')$. L'application $\rho \mapsto \rho \otimes (\det \rho)^{-1}\chi_{\mathrm{cycl}}^2$ induit des isomorphismes $\mathscr{X} \cong \mathscr{X}'$ et $T' \cong T$, ce qui permet de voir tous les T'-modules associés à $\rho_T^\diamond(2)$ comme des T-modules. On dispose de

$$\iota_{T'} : \rho_T^\diamond(1) \otimes_T \Pi_p(\rho_T(-1)) \to \widehat{H}^1_{c,S}$$

et donc, en composant avec $(0,\infty)$, cela fournit une forme linéaire sur $\rho_T^\diamond(1) \otimes_T \Pi_p(\rho_T(-1))$, et donc un élément

$$(0,\infty)_{T',S} \in \rho_T(-1) \otimes_T \Pi_p^*(\rho_T(-1)).$$

Par dualité, $\iota_{T'}$ fournit une surjection $\widehat{H}^1_S(2) \to \rho_T \otimes_T \Pi_p^*(\rho_T(-1))$. On note

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\Lambda\widehat{\otimes}\rho_T) \in H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T \otimes_T \Pi_p^*(\rho_T(-1))) \cong H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T) \otimes_T \Pi_p^*(\rho_T(-1))$$

l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}$.

Enfin, on dispose de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T) \in \rho_T^\diamond \otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T)$ (grâce au th. 0.12), et d'un accouplement naturel $\rho_T(-1) \otimes_T \rho_T^\diamond \to T$ (on fixe une orientation du motif de Tate, cf. n° 6.2.4).

Théorème 0.14. — *Dans $\Pi_p^*(\rho_T(-1)) \otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T)$, on a la factorisation suivante :*

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\Lambda\widehat{\otimes}\rho_T) = \left(\tfrac{1}{2}\left(1 + \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right) \star B_p^{c,d} \star (0,\infty)_{T',S}\right) \otimes \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T).$$

Remarque 0.15. — (i) On déduit du théorème que l'on peut diviser $\mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}}(\Lambda\widehat{\otimes}\rho_T)$ par le facteur $B_p^{c,d}$ que l'on avait dû introduire pour des raisons d'intégralité ; cela fournit

$$\mathbf{z}^{S}_{\mathrm{Kato}}(\Lambda\widehat{\otimes}\rho_T) \in H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_T) \otimes_T \Pi_p^*(\rho_T(-1))$$

(ii) Par construction, la localisation en p de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ est $(0,\infty)_{T,S}$ et on obtient une factorisation

$$\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}^{S}_{\mathrm{Kato}}(\Lambda\widehat{\otimes}\rho_T)) = \tfrac{1}{2}\big(1 + \big(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\big) \star \big((0,\infty)_{T',S} \otimes (0,\infty)_{T,S}\big)$$

sous la forme que l'on espérait.

(iii) La démonstration repose sur les ingrédients suivants :

• On prouve (th. 17.6) la factorisation du théorème en restriction à un point classique. Cela consiste à évaluer les deux membres sur des fonctions tests bien choisies ; le membre de gauche a été calculé par Kato [**42**] (cf. aussi th. 17.3 ci-après) et fait intervenir un produit de deux valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires, et chacun des termes du membre de droite fait intervenir une des valeurs spéciales.

• On déduit (lemme 17.9) de cette factorisation ponctuelle la factorisation du théorème.

• Le théorème d'Ash-Stevens [**2**] implique que $(0,\infty)_{T',S}$ « n'a pas de zéros » et on en déduit (th. 17.10) que $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ n'a pas de pôle, ce qui conclut la preuve du th. 0.12.

0.5. Céoukonfaikoi

Cet article comporte quatre parties de thématiques assez différentes.

• La partie I est consacrée aux correspondances de Langlands pour GL_2 (sur $\mathbf{Q}$).

◇ Le chap. 1 rassemble les notations utilisées dans tout l'article.

◇ Le chap. 2 fait un résumé des propriétés de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, et donne quelques compléments (comme l'injection naturelle $\Pi(V) \hookrightarrow \widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes V$ de la prop. 2.12 ou la prop. 2.16 à la base des résultats mentionnés dans le (i) de la rem. 0.8).

◇ Le chap. 3 est consacré à la construction de $\Pi(\rho_T)$ et de son modèle de Kirillov. Il contient une étude de la correspondance de Langlands locale en famille pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$.

• La partie II est consacrée à la cohomologie du groupe $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et ses avatars.

◇ Le chap. 4 étudie le cohomologie de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ agissant sur divers espaces fonctionnels adéliques, et fait le lien avec la cohomologie complétée d'Emerton.

◇ Le chap. 5 adélise la théorie des formes modulaires classiques et étudie le lien avec la cohomologie complétée, tandis que le chap. 6 fait le pont entre le point de vue cohomologie des groupes et le point de vue géométrique ; ce chapitre inclut en particulier la définition de l'application d'Eichler-Shimura p-adique.

◇ Le chap. 7 étudie les multiplicité des représentations lisses de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ dans divers incarnations de la cohomologie complétée.

• La partie III est consacrée à la factorisation de la cohomologie complétée.

◇ Le chap. 8 est consacré au calcul de la cohomologie étale des boules unité ouvertes usuelle et perfectoïde, avec en particulier la définition de l'application $\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$ et une loi de réciprocité explicite qui joue un grand rôle dans la suite.

◇ Le chap. 9 définit le modèle de Kirillov de la cohomologie complétée, et les chap. 10 et 11 étudie l'injectivité de ce modèle ; le chap. 12 explore les conséquences directes de cette injectivité.

◇ Le chap. 13 est consacré à la preuve du th. 0.2.

• La partie IV est consacrée à l'étude du système de Beilinson-Kato.

◇ Le chap. 14 démontre le th. 0.10.

◇ Le chap. 15 prouve le th. 0.12 (après extension des scalaires à $\mathrm{Fr}(T)$).

◇ Le chap. 16 est consacré à des rappels sur le système de Beilinson-Kato et le chap. 17 à la preuve du th. 0.14.

Remerciements. — Ce projet a débuté en 2014 et s'est poursuivi au gré des invitations entre la France et la Chine, dont deux mois et demi en Chine à l'automne 2016, entre le BICRM de Pékin, l'université Fudan de Shanghai et le centre de conférences de Sanya. P.C. voudrait remercier en particulier le SCMS, le Fudan Scholar programm et l'université de Fudan pour leurs invitations à Shanghai en mars 2018 et décembre 2018 ; S.W. voudrait remercier les universités d'Essen et Regensburg et le CRM de Montréal pour leur hospitalité de mars 2014 à juillet 2015, ainsi que Laurent Berger, Gabriel Dospinescu, l'ENS-Lyon et l'IMJ-PRG pour des invitations en avril 2018, novembre 2018 et août 2019.

Une première version a été déposée sur arXiv en avril 2021 (2104.09200 [math.NT]). La preuve de la factorisation du système de Beilinson-Kato y était nettement plus tortueuse car nous n'avions pas réussi à prouver l'injectivité du modèle de Kirillov de la cohomologie complétée. C'est Vincent Pilloni qui nous a suggéré, à la fin d'un exposé à Lyon en juin 2021, une stratégie utilisant les travaux de Lue Pan (une variante de la seconde approche de la rem. 0.6) pour prouver cette injectivité. La réalisation de cette stratégie a bénéficié de conversations avec Gabriel Dospinescu, Lue Pan et Juan-Esteban Rodriguez-Camargo et de l'hospitalité du MSRI de Berkeley lors du premier trimestre de 2023 et du HIM de Bonn lors du second semestre. Nous voudrions remercier tous les acteurs sus-nommés de leur aide.

Table des matières

PARTIE I
CORRESPONDANCES DE LANGLANDS LOCALES

1. Préliminaire

Le but de ce chapitre est de fixer un certain nombre de notations et de normalisations.

1.1. Adèles

1.1.1. Notations. — On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $S \subset \mathscr{P}$, on dit qu'un entier N est *à support dans* S si tous ses diviseurs premiers appartiennent à S.

Si $v \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}$ est une place de $\mathbf{Q}$, on note $\mathbf{Q}_v$ le complété de $\mathbf{Q}$ en v (et donc $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$). On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$, produit restreint des $\mathbf{Q}_v$: si $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbf{Z}_p$ est le complété profini de $\mathbf{Z}$, on a $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \otimes \widehat{\mathbf{Z}})$.

Si $S \subset \mathscr{P} \cup \{\infty\}$ est fini, on pose

$$\mathbf{Z}_S = \prod_{\ell\in S\cap\mathscr{P}} \mathbf{Z}_\ell, \quad \mathbf{Z}[\tfrac{1}{S}] = \mathbf{Z}[\tfrac{1}{\ell}, \ell \in S \cap \mathscr{P}], \quad \mathbf{Q}_S = \prod_{v\in S} \mathbf{Q}_v$$

On note $\mathbf{A}^{]S[}$ le produit restreint des $\mathbf{Q}_v$ pour $v \notin S$. Par exemple, $\mathbf{A}^{]\infty[} = \mathbf{Q} \otimes \widehat{\mathbf{Z}}$. On a $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_S \times \mathbf{A}^{]S[}$ pour tout S.

Si x est un objet adélique (i.e., un élément de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{A})$, etc.), et si v est une place de $\mathbf{Q}$, on note x_v la composante de x en v (et donc $x = (x_v)_v$). Si S est un ensemble fini de places de $\mathbf{Q}$, on note $x_S = (x_v)_{v\in S}$ la composante de x en les éléments de S et $x^{]S[} = (x_v)_{v\notin S}$ la composante de x hors de S (et donc $x = (x_S, x^{]S[})$.

Si $\mathbb{G}$ est un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$, les projections $\mathbb{G}(\mathbf{A}) \to \mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)$ ont des sections naturelles qui permettent de considérer les $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)$ comme des sous-groupes de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$.

De même, si S est un ensemble fini de places de $\mathbf{Q}$, alors $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S) = \prod_{v\in S} \mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)$ est naturellement un sous-groupe de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x_S x^{]S[}$ avec $x_S \in \mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ et $x^{]S[} \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]S[})$; de plus x_S et $x^{]S[}$ commutent.

1.1.2. Caractères additifs. — On note $\mathbf{e}_\infty : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ le caractère du groupe additif

$$\mathbf{e}_\infty(\tau) = e^{-2i\pi\,\tau}.$$

On note $\mathbf{e}_\mathbf{A} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}^*$ le caractère du groupe additif se factorisant à travers $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ et dont la restriction à $\mathbf{R} \subset \mathbf{A}$ est $\mathbf{e}_\infty$. Si ℓ est un nombre premier, on note $\mathbf{e}_\ell$ la restriction de $\mathbf{e}_\mathbf{A}$ à $\mathbf{Q}_\ell \subset \mathbf{A}$. Alors $\mathbf{e}_\ell$ se factorise à travers $\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell = \mathbf{Z}[\frac{1}{\ell}]/\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et on a

$$\mathbf{e}_\ell(x_\ell) = e^{2i\pi\,\overline{x}_\ell}$$

où $\overline{x}_\ell$ est l'image de x dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par l'inclusion ci-dessus. On a alors

$$\mathbf{e}_\mathbf{A}((x_v)_v) = \prod_v \mathbf{e}_v(x_v).$$

1.1.3. Caractères multiplicatifs. — Soit $\omega : \mathbf{A}^* \to \mathbf{C}^*$ un caractère continu. Si v est une place de $\mathbf{Q}$, on note ω_v la restriction de ω à $\mathbf{Q}_v^*$. Il existe un entier $N \geq 1$ et un caractère $\tilde{\omega} : (\mathbf{Z}/N)^* \to \mathbf{C}^*$ tel que la restriction de ω à $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ s'obtienne en composant $\tilde{\omega}$ avec la projection naturelle $\widehat{\mathbf{Z}}^* \to (\mathbf{Z}/N)^*$.

Si ω se factorise à travers $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$, et si $p \nmid N$, alors $\omega_p(p) = \tilde{\omega}^{-1}(p)\omega_\infty(p)^{-1}$.

• *Le caractère norme* $|\ |_{\mathbf{A}}$. Si v est une place de $\mathbf{Q}$, on note $|\ |_v$ la norme sur $\mathbf{Q}_v$ (si v est la place correspondant à un nombre premier ℓ, on a $|\ell|_v = \ell^{-1}$). On définit $|\ |_{\mathbf{A}}$ par la formule

$$|x|_{\mathbf{A}} = \prod_v |x_v|_v.$$

La formule du produit implique que $|\ |_{\mathbf{A}}$ se factorise à travers $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$.

• *Le caractère* $\delta_{\mathbf{A}}$. On note $\delta_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^* \to \mathbf{C}^*$ le caractère

$$x \mapsto \delta_{\mathbf{A}}(x) = x_\infty^{-1}|x|_{\mathbf{A}},$$

et donc $\delta_{\mathbf{A}}$ est localement constant, à valeurs dans $\mathbf{Q}^*$. De plus,

$$\delta_{\mathbf{A},\infty} = \mathrm{sign}, \quad \delta_{\mathbf{A},\ell} = |\ |_\ell, \quad \delta_{\mathbf{A}} = |\ |_{\mathbf{A}} \text{ sur } \mathbf{A}^{]\infty[,*}.$$

• *Caractères algébriques.* Un caractère continu $\chi : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*$ est dit *algébrique, de poids* $a \in \mathbf{Z}$, si $\chi(x_\infty) = x_\infty^a$ pour tout $x_\infty \in \mathbf{R}_+^*$. Par exemple, le caractère $|\ |_{\mathbf{A}}$ est algébrique de poids 1, et $|\ |_{\mathbf{A}}^a$ est algébrique de poids a.

De même, un caractère continu $\chi : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$ est dit *algébrique, de poids* $a \in \mathbf{Z}$, s'il existe $n \geq 1$ tel que $\chi(x_p) = x_p^a$ pour tout $x_p \in 1 + p^n\mathbf{Z}_p$. Notons qu'un caractère continu $\chi : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$ est automatiquement unitaire car il se factorise par $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*\mathbf{R}_+^*$ qui est compact (isomorphe à $\widehat{\mathbf{Z}}^*$).

Si χ est algébrique de poids a, alors $\chi = |\ |_{\mathbf{A}}^a\eta$, où $\eta : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*$ est d'ordre fini, et donc à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}$ (en fait dans une extension finie de $\mathbf{Q}$). Le caractère $x \mapsto x_\infty^{-a}\chi(x)$ est aussi à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}$ et on définit $\chi^{(p)} : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$ par la formule

$$x_p^{-a}\chi^{(p)}(x) = x_\infty^{-a}\chi(x) = \eta\delta_{\mathbf{A}}^a(x),$$

où tous les membres appartiennent à $\overline{\mathbf{Q}}$. Le caractère $\chi^{(p)}$ est algébrique de poids a et $\chi \mapsto \chi^{(p)}$ est une bijection de l'ensemble des caractères algébriques $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*$ sur celui des caractères algébriques de $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$; cette bijection préserve le poids des caractères. Si $\chi_\infty(x_\infty) = \mathrm{sign}(x_\infty)^e|x_\infty|^a$, avec $e \in \{0,1\}$, alors

$$\chi_\infty^{(p)} = \mathrm{sign}^{a+e}, \quad \chi_p^{(p)}(x_p) = x_p^a\chi(x_p) \quad \text{et} \quad \chi_\ell^{(p)} = \chi_\ell, \text{ si } \ell \neq \infty, p.$$

1.1.4. Groupes de Galois, de Weil et de Weil-Deligne. — On note $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$ et on fixe un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$, pour tout ℓ.

Si $K = \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_\ell$, on note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K et G_K^{ab} son abélianisé. On note $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell} \subset G_{\mathbf{Q}_\ell}$ le groupe de Weil et $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}$ le groupe de Weil-Deligne.

1.1.5. L'extension cyclotomique. — On note $\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$ obtenue en rajoutant toutes les racines de l'unité (c'est aussi l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}$, i.e. $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q}) = G_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{ab}}$). Le caractère cyclotomique $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}} : G_{\mathbf{Q}} \to \widehat{\mathbf{Z}}^*$ fournit une identification

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}} : G_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{Z}}^* \quad (\text{d'inverse } u \mapsto \sigma_u).$$

Il fournit aussi des identifications $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_M)/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/M)^*$, pour tout $M \geq 1$.

Remarque 1.1. — (i) L'application $x \mapsto \phi_x$, où $\phi_x(u) = \sigma_u(x)$ si $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, induit un isomorphisme (LC désigne l'espace des fonctions localement constantes)

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})^{\widehat{\mathbf{Z}}^*},$$

où $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ agit sur ϕ par $(\sigma_a \cdot \phi)(u) = \sigma_a(\phi(a^{-1}u))$.

(ii) Si $K \supset \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$, l'application $x \otimes y \mapsto (u \mapsto x\sigma_u(y))$ induit un isomorphisme

$$K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, K)$$

de K-algèbres. De plus, $\phi \mapsto \int_{\widehat{\mathbf{Z}}^*} \phi$, de $\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, K)$ dans K, correspond via cet isomorphisme à $1 \otimes \mathrm{Tr}$, où $\mathrm{Tr} : \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}} \to \mathbf{Q}$ est la trace normalisée (égale à $\frac{1}{[F:\mathbf{Q}]}\mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}}$ sur F, si $F \subset \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$ est une extension finie de $\mathbf{Q}$).

1.1.6. Théorie du corps de classes. — L'inclusion de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ induit une injection $G_{\mathbf{Q}_\ell} \hookrightarrow G_{\mathbf{Q}}$ ainsi qu'une flèche $G_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}} \to G_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{ab}}$ qui se trouve être injective car l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}_\ell$ est aussi l'extension cyclotomique.

On note σ_ℓ l'élément de $G_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}}$ agissant trivialement sur $\mathbf{Q}_\ell(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})$ et par $x \mapsto x^\ell$ sur $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ (i.e. σ_ℓ est le frobenius arithmétique dans $G_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}}$). L'image de σ_ℓ dans $G_{\mathbf{Q}}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{Z}}^*$ est $\ell^{]\infty,\ell[}$.

Par ailleurs, l'inclusion $\widehat{\mathbf{Z}}^* \hookrightarrow \mathbf{A}^*$ induit un isomorphisme $\widehat{\mathbf{Z}}^* \cong \mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$. L'image de σ_ℓ dans $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$ est aussi égale à $\ell_\ell^{-1} = \ell^{]\infty,\ell[}\ell_\infty\ell^{-1}$. Comme l'image du sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}}$ dans $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ est $\mathbf{Z}_\ell^*$, on voit que $G_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}}$ s'envoie dans l'adhérence de $\mathbf{Q}_\ell^*$ dans $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$ et que l'image de $W_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}}$ est $\mathbf{Q}_\ell^*$.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
W_{\mathbf{Q}_\ell} \arrow[r] \arrow[d] & G_{\mathbf{Q}_\ell} \arrow[r] & G_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\varepsilon_{\mathbf{A}}"] & \widehat{\mathbf{Z}}^* \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbf{Q}_\ell^* \arrow[rrr] & & & \mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*
\end{tikzcd}$$

Si $[L : \mathbf{Q}_p] < \infty$, on déduit de ce qui précède des identifications entre :

- caractères continus $\chi_{\mathrm{Gal}} : W_{\mathbf{Q}_\ell} \to L^*$ et caractères continus $\chi : \mathbf{Q}_\ell^* \to L^*$,
- caractères continus $\chi_{\mathrm{Gal}} : G_{\mathbf{Q}_\ell} \to \mathscr{O}_L^*$, caractères continus $\chi_{\mathrm{Gal}} : W_{\mathbf{Q}_\ell} \to \mathscr{O}_L^*$ et caractères continus $\chi : \mathbf{Q}_\ell^* \to \mathscr{O}_L^*$
- caractères continus $\omega : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathscr{O}_L^*$ et caractères continus $\omega_{\mathrm{Gal}} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathscr{O}_L^*$.

Dans les identifications ci-dessus, $\chi_{\mathrm{Gal}}(\sigma_\ell) = \chi(\ell_\ell^{-1})$ et $\omega_{\mathrm{Gal}}(\sigma) = \omega(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}(\sigma))$, et si ω_ℓ est la restriction de ω à $\mathbf{Q}_\ell^*$, alors $\omega_{\mathrm{Gal},\ell} = \omega_{\ell,\mathrm{Gal}}$

1.1.7. Le caractère cyclotomique. — Par exemple, le caractère p-cyclotomique

$$\varepsilon_p : G_{\mathbf{Q}_\ell}^{\mathrm{ab}} \to \mathbf{Z}_p^*,$$

obtenu par action sur $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, correspond :

- au caractère $|\ |_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell^*$, si $\ell \neq p$: on a $\boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma_\ell) = |\ell_\ell^{-1}|_\ell = \ell$;
- au caractère $x \mapsto x|x|_p$ de $\mathbf{Q}_p^*$, si $\ell = p$.

1.1.8. Sommes de Gauss globales. — Si $\chi = \eta|\ |_{\mathbf{A}}^a$, où η est de conducteur N, et si $\tilde{\eta} : (\mathbf{Z}/N)^* \to \mathbf{C}^*$ est le caractère de Dirichlet associé, définissons la somme de Gauss $G(\chi)$ par

$$G(\chi) = G(\tilde{\eta}) = \sum_{b \in (\mathbf{Z}/N)^*} \tilde{\eta}(b)\mathbf{e}_\infty(\tfrac{b}{N}).$$

Remarque 1.2. — (i) Si χ est à valeurs dans L, alors $G(\chi) \in (L \otimes \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})^*$ et, si $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, alors

$$\sigma_a(G(\chi)) = \sum_{b \in (\mathbf{Z}/N)^*} \tilde{\eta}(b)\mathbf{e}_\infty(\tfrac{ab}{N}) = \chi^{-1}(a)G(\chi).$$

(ii) On déduit du (i) que, $\frac{G(\chi_1\chi_2)}{G(\chi_1)G(\chi_2)} \in L^* \otimes 1 \subset (L \otimes \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})^*$, si χ_1, χ_2 sont à valeurs dans L ; en particulier, $G(\chi)G(\chi^{-1}) \in L^* \otimes 1$.

1.1.9. Sommes de Gauss locales. — Si $\eta : \mathbf{Z}_\ell^* \to L^*$ est un caractère de conducteur ℓ^n, on note $G(\eta) \in L \otimes \mathbf{Z}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})$, la somme de Gauss

$$G(\eta) := \sum_{x \in (\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})^*} \eta(x) \otimes \mathbf{e}_\ell(\tfrac{x}{\ell^n}).$$

Si $a \in \mathbf{Z}_\ell^*$, on a

$$\sigma_a(G(\eta)) = \eta(a)^{-1}G(\eta).$$

1.2. Le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$

Soit

$$\mathbb{G} := \mathbf{GL}_2$$

et soient

$$\mathbb{U} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subset \mathbb{P} := \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subset \mathbb{B} := \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \subset \mathbb{G}$$

l'unipotent, le mirabolique, et le borel.

1.2.1. Le groupe $\mathbb{G}(\mathbf{R})$. — Si $g \in \mathbb{G}(\mathbf{R})$, on définit

$$\mathrm{sign}(g) \in \{\pm 1\}$$

comme le signe de $\det g$. L'application $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \mapsto a + ib$ induit une identification

$$\mathbf{C}^* = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right),\ a + ib \neq 0\right\}.$$

L'application $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \frac{ai+b}{ci+d}$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbf{C}^* \simeq \mathscr{H} := \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \smallsetminus \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) = \mathscr{H}^+ \sqcup \mathscr{H}^-,$$

où

$$\mathscr{H}^+ = \{\tau \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\tau) > 0\}, \quad \mathscr{H}^- = \{\tau \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(\tau) < 0\}.$$

Le normalisateur de $\mathbf{C}^*$ agit par multiplication à droite (i.e. $(g, \tau) \mapsto \tau g$) sur $\mathscr{H}$. Ce normalisateur est $\mathbf{C}^* \sqcup \mathbf{C}^*\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathbf{C}^*$ agit trivialement sur $\mathscr{H}$ tandis que $\mathbf{C}^*\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

agit par $\tau \mapsto \overline{\tau}$ puisque $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -a & b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $\frac{-ai+b}{-ci+d}$ est le conjugué complexe de $\frac{ai+b}{ci+d}$. On prolonge l'action du normalisateur de $\mathbf{C}^*$ en une action $(g, \tau) \mapsto \tau g$ de $\mathbb{G}(\mathbf{R})$ agissant à travers $\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$, à ne pas confondre avec l'action naturelle $(g, \tau) \mapsto g \cdot \tau$ par multiplication à gauche sur $\mathscr{H} = \mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbf{C}^*$:

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{et} \quad \tau g = \begin{cases} \tau & \text{si } g \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+, \\ \overline{\tau} & \text{si } g \notin \mathbb{G}(\mathbf{R})_+. \end{cases}$$

1.2.2. Sous-groupes de congruence. — Si $N \in \mathbf{N}$, on note

$$\widehat{\Gamma}(N) = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \to \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N)), \quad \widehat{\Gamma}_0(N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\ c \in N\widehat{\mathbf{Z}}\right\},$$
$$\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/N)), \quad \Gamma_0(N) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}),\ c \in N\mathbf{Z}\right\}$$

On a donc :

$$\Gamma(N) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \cap \widehat{\Gamma}(N), \quad \Gamma_0(N) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \cap \widehat{\Gamma}_0(N)$$
$$\Gamma_0(1) = \Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \quad \widehat{\Gamma}(1) = \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$$

• Tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ peut s'écrire $\gamma^{-1} g_\infty \kappa$ avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, $g_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})$ (resp. $g_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$) et $\kappa \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et cette écriture est unique à $(\gamma, g_\infty, \kappa) \mapsto (\alpha\gamma, \alpha g_\infty, \alpha\kappa)$ près, avec $\alpha \in \mathbb{G}(\mathbf{Z})$ (resp. $\alpha \in \Gamma(1)$).

• Plus généralement, tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ peut s'écrire $\gamma^{-1} g_\infty \kappa$ avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, $g_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et $\kappa \in \widehat{\Gamma}_0(N)$, et cette écriture est unique à $(\gamma, g_\infty, \kappa) \mapsto (\alpha\gamma, \alpha g_\infty, \alpha\kappa)$ près, avec $\alpha \in \Gamma_0(N)$.

• Soit $S \subset \mathscr{P} \cup \{\infty\}$, fini.

— Si $\infty \in S$, tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ peut s'écrire $\gamma^{-1} g_\infty \kappa$ avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$, $g_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})$ et $\kappa \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et cette écriture est unique à $(\gamma, g_\infty, \kappa) \mapsto (\alpha\gamma, \alpha g_\infty, \alpha\kappa)$ près, avec $\alpha \in \mathbb{G}(\mathbf{Z})$.

— Si $\infty \notin S$, tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ peut s'écrire $\gamma^{-1}\kappa$ avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$ et $\kappa \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et cette écriture est unique à $(\gamma, \kappa) \mapsto (\alpha\gamma, \alpha\kappa)$ près, avec $\alpha \in \mathbb{G}(\mathbf{Z})$.

1.2.3. Représentations lisses de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$. — Soit L un corps de caractéristique 0 (que l'on considère muni de la topologie discrète). Si π est une L-représentation lisse de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$, admettant un caractère central ω_π, un *modèle de Kirillov* pour π est une injection $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariante

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*, L \otimes \mathbf{Q}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}])^{\mathbf{Z}_\ell^*}$$

dans le L-espace des $\phi : \mathbf{Q}_\ell^* \to L \otimes \mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})$, localement constantes, vérifiant $\sigma_a(\phi(x)) = \phi(ax)$, pour tous $x \in \mathbf{Q}_\ell^*$ et $a \in \mathbf{Z}_\ell^*$ (où σ_a agit sur $\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}$ par $\zeta \mapsto \zeta^a$), muni de l'action de $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)$ donnée par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi\right)(x) = \omega_\pi(d)\mathbf{e}_\ell\left(\tfrac{bx}{d}\right)\phi\left(\tfrac{ax}{d}\right)$$

Si χ_1, χ_2 sont des caractères localement constants de $\mathbf{Q}_\ell^*$, on note $\chi_1 \otimes |\ |_\ell^{-1}\chi_2$ le caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \chi_1(a)\chi_2(d)|d|_\ell^{-1}$ de $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)$ et $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)}(\chi_1 \otimes |\ |_\ell^{-1}\chi_2)$ la représentation lisse induite, i.e.

$\{\phi\in \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),L),\ \phi\big(\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\big)x\big)=\chi_1(a)\chi_2(d)|d|_\ell^{-1}\phi(x),\ \forall x\in\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),\ \big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\big)\in\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)\}$,

l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ étant $(g\star\phi)(x)=\phi(xg)$. Le modèle de Kirillov $\phi\mapsto\mathscr{K}_\phi$ de $\pi=\mathrm{Ind}(\chi_1\otimes\chi_2|\ |_\ell^{-1})$ est donné par (la suite est constante pour n assez grand) :

$$\mathscr{K}_\phi(y)=\lim_{n\to+\infty}\tfrac{1}{G(\chi_2)}\int_{\ell^{-n}\mathbf{Z}_\ell}\phi\big(\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}y&x\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big)\mathbf{e}_\ell(-x)\,dx.$$

Si χ_1 et χ_2 sont non ramifiés, $H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell),\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)}(\chi_1\otimes|\ |_\ell^{-1}\chi_2))$ est de dimension 1. Dans le modèle de Kirillov, cet espace est engendré par la fonction v_π définie par

$$v_\pi(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin\mathbf{Z}_\ell,\\ \chi_1(\ell)^n+\chi_1(\ell)^{n-1}\chi_2(\ell)+\cdots+\chi_2(\ell)^n & \text{si } x\in\ell^n\mathbf{Z}_\ell^* \text{ et } n\geq 0.\end{cases}$$

C'est *le nouveau vecteur normalisé* (par la condition $v_\pi(1)=1$) de π ; il engendre π en tant que $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$-module.

Si $T_\ell=\frac{1}{\ell}\big(\big(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\ell\end{smallmatrix}\big)_\ell+\sum_{b=0}^{\ell-1}\big(\begin{smallmatrix}\ell&b\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)$, on a

$$T_\ell\star v_\pi=(\chi_1(\ell)+\chi_2(\ell))v_\pi.$$

On note v'_π la fonction

$$v'_\pi=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell^*}\in\pi;$$

c'est un générateur du foncteur de Kirillov [**27**, § 4.1] de π, i.e. le module

$$\big\{v\in\pi,\ \big(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_\ell^*&\mathbf{Z}_\ell\\0&1\end{smallmatrix}\big)\cdot v=v,\ \textstyle\sum_{i=0}^{\ell-1}\big(\begin{smallmatrix}\ell&i\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\cdot v=0\big\}.$$

Un petit calcul fournit la relation

$$\big(1-(\chi_1(\ell)+\chi_2(\ell))\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell+(\chi_1(\ell)\chi_2(\ell))\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-2}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)\star v_\pi=v'_\pi \tag{1.3}$$

1.2.4. La correspondance de Langlands locale classique. — Soit L un corps de caractéristique 0 (muni de la topologie discrète). Soit $\rho:\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}\to\mathbf{GL}_2(L)$ une L-représentation continue (c'est la donnée d'une représentation $\rho:\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}\to\mathbf{GL}_2(L)$ et de $N\in\mathbf{M}_2(L)$ tels que $N\rho(g)=\ell^{\deg g}\rho(g)N$, pour tout $g\in\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$). On sait associer à ρ une L-représentation $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$; la correspondance $\rho\mapsto\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho)$ est normalisée (via la compatibilité local-global) pour que les fonctions L globales coïncident. Elle vérifie les propriétes suivantes :

- $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho)$ est lisse, admissible, admet un caractère central $\omega_{\Pi_\ell(\rho)}$, et on a :

$$\omega_{\Pi_\ell(\rho)}=|\ |_\ell^{-1}\det\rho.$$

- $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho)$ admet un modèle de Kirillov. De plus, dans ce modèle, $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho)$ contient $\mathrm{LC_c}(\mathbf{Q}_\ell^*,L\otimes\mathbf{Q}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}])^{\mathbf{Z}_\ell^*}$ et le quotient est de dimension 0, 1 ou 2 sur L suivant que ρ est irréductible, que N agit non trivialement ou que ρ n'est pas irréductible et N agit trivialement.
- Si N agit trivialement et si

$$\rho^{\mathrm{ss}}=\chi_1\oplus\chi_2,$$

avec $\chi_2 \neq |\ |_\ell \chi_1$ (ce que l'on peut imposer en échangeant χ_1 et χ_2), alors

$$\Pi_\ell^{\rm cl}(\rho) = {\rm Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)}(\chi_1 \otimes |\ |_\ell^{-1}\chi_2).$$

• Si N agit non trivialement, alors ρ est une extension non triviale de χ_1 par $\chi_2 = |\ |_\ell \chi_1$ et $\Pi_\ell^{\rm cl}(\rho) = {\rm St} \otimes \chi_1$ où St est la steinberg.

2. La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans ce chapitre, on rappelle succinctement un certain nombre de propriétés de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, ses liens avec la théorie d'Iwasawa..., et on donne quelques compléments : en particulier une formule explicite (prop. 2.10) exprimant exponentielles duales de classes de cohomologie galoisienne pour une représentation de de Rham en termes de la représentation de G associée, et un modèle de Kirillov (n$^{\rm o}$ 2.4.2) pour $V^* \otimes \Pi_p(V)$ qui joue un grand rôle dans la suite.

2.1. (φ, Γ)-modules

2.1.1. Quelques anneaux. — Soit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ = \mathscr{O}_L[[T]]$. On définit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ comme le complété de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{T}]$ pour la topologie p-adique ; c'est l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, avec $a_k \in \mathscr{O}_L$ et $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. On note $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

Si $h \geq 1$, on pose $r_h = v_p(\zeta_{p^h} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{h-1}}$ (resp. $r_h = \frac{1}{2^h}$, si $p = 2$), et $n_h = \frac{1}{r_h}$. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,h}$ le complété de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{p}{T^{n_h}}]$ pour la topologie p-adique, et on pose $\mathscr{E}^{(0,r_h]} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger,h}[\frac{1}{p}]$; on définit alors le sous-corps $\mathscr{E}^\dagger$ des éléments *surconvergents* de $\mathscr{E}$, comme la réunion des $\mathscr{E}^{(0,r_h]}$.

Si $n \geq 1$, on pose $L_n = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$, et on note ι_n l'injection de $\mathscr{E}^{(0,r_n]}$ dans $L_n[[t]]$ envoyant f sur $f(\zeta_{p^n} e^{-t/p^n} - 1)$.

2.1.2. Actions de φ et Γ. — Soit $\Gamma = {\rm Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$. Le caractère [6] cyclotomique $\chi := \boldsymbol{\varepsilon}_p$ induit un isomorphisme $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p^*$, et on note $a \mapsto \sigma_a$ l'isomorphisme inverse.

On munit les L-algèbres topologiques $\mathscr{E}, \mathscr{E}^\dagger$ d'actions continues de φ et Γ définies par $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$. L'injection ι_n ci-dessus est Γ-équivariante si on fait agir σ_a sur t par $\sigma_a(t) = at$.

2.1.3. (φ, Γ)-modules étales. — Si $\Lambda = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}, \mathscr{E}, \mathscr{E}^\dagger$, un (φ, Γ)-module D sur Λ est un Λ-module libre, de rang fini, munis d'actions semi-linéaires de φ et Γ commutant entre elles. On dit que D *est étale* si φ est de pente 0. On note $\Phi\Gamma^{\rm et}(\Lambda)$ la catégorie des (φ, Γ)-modues étales sur Λ. (On peut aussi considérer des $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules de torsion, et

6. On note simplement χ le caractère cyclotomique dans ce chapitre.

beaucoup de preuves utilisent des dévissages les faisant intervenir, mais nous n'en aurons pas vraiment besoin.)

2.1.4. L'opérateur ψ. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\Lambda)$, tout élément x de D peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x_i)(1+T)^i$. Cela permet de définir un inverse à gauche $\psi : D \to D$ de φ par la formule $\psi(x) = x_0$; de plus ψ commute à Γ.

2.1.5. Surconvergence. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{E})$, on note $D^\dagger$ le module des éléments surconvergents **[9, 5]** de D : si $n \in \mathbf{N}$, soit $D^{(0,r_n]}$ le plus grand sous-$\mathscr{E}^{(0,r_n]}$-module M de type fini de D tel que $\varphi(M)$ soit inclus dans le sous-$\mathscr{E}^{(0,r_{n+1}]}$-module de D engendré par M. Il existe un entier $m(D) \geq 1$ tel que $D^{(0,r_{m(D)}]}$ soit de rang d sur $\mathscr{E}^{(0,r_{m(D)}]}$ et alors $D^{(0,r_n]} = \mathscr{E}^{(0,r_n]} \otimes_{\mathscr{E}^{(0,r_{m(D)}]}} D^{(0,r_{m(D)}]}$, pour tout $n \geq m(D)$, et $D^\dagger$ est la limite inductive des $D^{(0,r_n]}$. On a $D^\dagger \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{E}^\dagger)$ et $D = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$.

2.1.6. Les modules $D_{{\rm dif},n}$, $D^+_{{\rm dif},n}$ et $D^-_{{\rm dif},n}$. — Si $n \geq 1$, on pose

$$D^+_{{\rm dif},n} = L_n[[t]] \otimes D^{(0,r_n]}$$

où l'on voit $L_n[[t]]$, pour $n \geq m(D)$, comme une $\mathscr{E}^{(0,r_n]}$-algèbre via le morphisme $\iota_n : \mathscr{E}^{(0,r_n]} \to L_n[[t]]$. Soient

$$L_\infty[[t]] := \varinjlim_n L_n[[t]] \quad \text{et} \quad D^+_{\rm dif} := \varinjlim_n D^+_{{\rm dif},n}.$$

Alors $D^+_{\rm dif}$ est un $L_\infty[[t]]$-module libre de rang d muni d'une action de Γ. On pose $D_{\rm dif} = D^+_{\rm dif}[\frac{1}{t}]$; c'est un $L_\infty((t)) := L_\infty[[t]][t^{-1}]$-module muni d'une filtration décroissante par les $D^i_{\rm dif} := t^i D^+_{\rm dif}$, stable par Γ. Le quotient $D^-_{\rm dif} = D_{\rm dif}/D^+_{\rm dif}$ est un $L_\infty[t]$-module de torsion, muni d'une action localement analytique de Γ (limite inductive de représentations de dimension finie).

2.1.7. (φ,Γ)-module de Rham. — On dit que D est *de Rham* si le L-espace $D_{\rm dR} = (D_{\rm dif})^\Gamma$ est de dimension d. Si c'est le cas, alors $D_{\rm dif} = L_\infty((t)) \otimes_L D_{\rm dR}$ et, si on munit $D_{\rm dR}$ de la filtration ($D^i_{\rm dR}$, $i \in \mathbf{Z}$) induite par la filtration naturelle de $D_{\rm dif}$, on a $D^+_{\rm dif} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} t^{-i} L_\infty[[t]] \otimes D^i_{\rm dR}$. Si D est de Rham, *les poids de D* sont les opposés des sauts de la filtration, i.e. les entiers i tels que $D^{-i}_{\rm dR} \neq D^{1-i}_{\rm dR}$.

2.2. (φ,Γ)-modules et représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$

Posons :

$$G = \mathbb{G}(\mathbf{Q}_p), \quad P = \mathbb{P}(\mathbf{Q}_p), \quad U = \mathbb{U}(\mathbf{Q}_p),$$

et notons P^+ le sous-semi-groupe $P^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de P.

2.2.1. La correspondance $D \mapsto \Pi_p(D)$. — On renvoie à **[13, 19]** ou **[17]** pour ce qui suit. Soit $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{E})$ ou $\Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, de rang 2. Notons ω_D le caractère

$$\omega_D = (x|x|)^{-1} \det D.$$

• *Le faisceau $U \mapsto D \boxtimes U$.*— D donne naissance à un faisceau P^+-équivariant $U \mapsto D \boxtimes U$ sur $\mathbf{Z}_p$, avec $D \boxtimes \mathbf{Z}_p = D$, et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P^+$ agit sur $x \in \mathbf{Z}_p$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x = ax+b$, et sur D par $\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x = (1+T)^b \varphi^k \circ \sigma_a(x)$. Ce faisceau se prolonge, de manière unique, en un faisceau G-équivariant $U \mapsto D \boxtimes U$ (où U décrit les ouverts compacts) sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, tel que le centre de G agisse par ω_D, et il existe une représentation unitaire $\Pi_p(D)$ de G telle que l'on ait une suite exacte

$$0 \to \Pi_p(D)^* \otimes \omega_D \to D \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi_p(D) \to 0$$

Remarque 2.1. — (i) Si D n'est pas une extension de $\mathscr{E}((x|x|)^{-1}\delta)$ par $\mathscr{E}(\delta)$, la représentation $\Pi_p(D)$ ci-dessus n'a ni sous-objet ni quotient de dimension finie.

(ii) Dans le cas pathologique où D est une telle extension, la représentation ci-dessus admet δ comme sous-objet et n'est pas celle que l'on veut. Le quotient $\Pi_p^{\min}(D)$ par δ n'a ni sous-objet ni quotient de dimension finie, et $\mathrm{Ext}^1(\delta, \Pi_p^{\min}(D))$ est de dimension 2 ; on définit $\Pi_p(D)$ comme l'extension universelle : on a une suite exacte

$$0 \to \Pi_p^{\min}(D) \to \Pi_p(D) \to \delta \oplus \delta \to 0$$

• *Dualité*.— On fait agir Γ et φ sur $\frac{dT}{1+T}$ par $\sigma_a\big(\frac{dT}{1+T}\big) = a\frac{dT}{1+T}$ et $\varphi\big(\frac{dT}{1+T}\big) = \frac{dT}{1+T}$. Cela nous fournit le (φ, Γ)-module $\Lambda\frac{dT}{1+T} \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\Lambda)$, si $\Lambda = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}, \mathscr{E}$. On pose alors $\check{D} = \mathrm{Hom}_\Lambda(D, \Lambda\frac{dT}{1+T})$; c'est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\Lambda)$ et $V(\check{D})$ est le dual de Tate $\check{V}(D)$ de $V(D)$ (i.e. $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(V(D), \mathscr{O}_L(1))$ (resp. $\mathrm{Hom}_L(V(D), L(1))$), si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ (resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$).

On note $\{\ ,\ \} : \check{D} \times D \to L$ l'accouplement défini par

$$\{\check{x}, y\} = \mathrm{rés}_0(\langle \sigma_{-1}(\check{x}), y\rangle),$$

où $\langle\ ,\ \rangle : \check{D} \otimes D \to \mathscr{E}\frac{dT}{1+T}$ est l'accouplement naturel, et $\mathrm{rés}_0\, f dT = a_{-1}$, si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$. Cet accouplement se prolonge (de manière unique) en un accouplement parfait, G-équivariant,

$$\{\ ,\ \} : (\check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1) \otimes (D \boxtimes \mathbf{P}^1) \to L$$

tel que $\check{D} \boxtimes U$ et $D \boxtimes V$ sont orthogonaux si $U \cap V = \varnothing$. On peut réécrire la suite exacte ci-dessus sous la forme

$$0 \to \Pi_p(\check{D})^* \to D \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi_p(D) \to 0$$

2.2.2. Théorie d'Iwasawa. — Soit $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$; on note $[\sigma_a] \in \Lambda$ l'élément correspondant à σ_a par l'injection naturelle $\Gamma \hookrightarrow \Lambda^*$.

Soient $\Lambda = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}, \mathscr{E}$ et $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\Lambda)$. Si $V := V(D)$ est la représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ associée à D par l'équivalence de catégories de Fontaine, on dispose [**10**, th. II.1.3] d'un isomorphisme de Λ-modules

$$\mathrm{Exp}^* : H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V) \xrightarrow{\sim} D^{\psi=1}.$$

Par ailleurs, l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit une flèche

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : (\Pi_p(\check{D})^*)^{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)=1} \to D^{\psi=1}, \quad \text{avec } \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu\big) = \sigma_a(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu)),$$

qui est un isomorphisme en général [7]. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.2. — *Si* $\mu \in \Pi_p(\check{D})^*$ *est fixe par* $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *il existe un unique* $\lambda(\mu) \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V)$ *tel que* $\mathrm{Exp}^*(\lambda(\mu)) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu$. *De plus, si* $a \in \mathbf{Z}_p^*$,

$$\lambda\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu\big) = [\sigma_a] \cdot \lambda(\mu).$$

Enfin, *si D est de Rham*, on a la loi de réciprocité explicite suivante [**10**, th. IV.2.1] où $\exp^*$ est l'application exponentielle duale de Bloch-Kato : dans la proposition, $\int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})}, V \otimes \chi^j)$ et $\exp^*\big(\int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda\big) \in t^{-j}L_n \otimes_L \mathrm{Fil}^j D_{\mathrm{dR}}$, où

$$t = -\log[\varepsilon] \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \text{ est le } 2i\pi\ p\text{-adique de Fontaine, avec } \varepsilon = (1, \zeta_p, \dots, \zeta_{p^n}, \dots).$$

(Si V est une représentation de de Rham, $\exp^*$ envoie $H^1(G_K, V)$ dans $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V)$.)

Proposition 2.3. — *Si* $\lambda \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V)$, *et si n est assez grand,*

$$p^{-n}\iota_n(\mathrm{Exp}^*(\lambda)) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \exp^*\big(\int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda\big) \in \mathrm{Fil}^0(L_n[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{dR}}).$$

Remarque 2.4. — Soit $\phi(x) = \sum_{j\in J}\phi_j(x)x^j$, où $J \subset \mathbf{Z}$ est fini, et $\phi_j \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*, L_\infty((t)))$. Il existe donc $n \geq 1$ tel que ϕ_j soit constante modulo p^n, pour tout j. On définit alors $\exp^*(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi(x)\lambda)$ par la formule

$$\exp^*(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi(x)\lambda) = \sum_{j\in J}\sum_{a \bmod p^n}\phi_j(a)\exp^*(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda) \in L_\infty((t)) \otimes_L D_{\mathrm{dR}}.$$

(On a $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})}, V \otimes \chi^j)$.)

Maintenant, si $\phi(ax) = \sigma_a(\phi(x))$ pour tous $a, x \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\phi(x) = \sum_{j\in J}\sigma_x(\alpha_j)(tx)^j$, avec $\alpha_j \in L_n$. Comme $t^j\exp^*\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda = \sigma_a(t^j\exp^*\int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda)$, on a

$$\exp^*(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi(x)\lambda) = \sum_{a \bmod p^n}\sigma_a\Big(\sum_{j\in J}\alpha_j t^j\exp^*\int_{1+p^n\mathbf{Z}_p} x^j\lambda\Big) \in D_{\mathrm{dR}} \subset L_\infty((t)) \otimes_L D_{\mathrm{dR}}.$$

2.2.3. Résultats de densité. — Si $c, d \in \mathbf{Z}_p^*$, soit $B_p^{c,d} = \big(c^2 - \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big)\big(d^2 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\big)$, et soit $(B_p^{c,d})^*$ l'opérateur adjoint (obtenu en remplaçant c et d par leurs inverses dans les matrices).

Lemme 2.5. — *Si c est un générateur de* $\mathbf{Z}_p^*$, *si* $d = c^{-1}$ *et si* $V = V(D)$ *n'a pas de quotient non nul sur lequel l'inertie agit par* χ^{-1} *ou par* $\chi^2\det V$, *le sous-espace engendré par les* $(B_p^{c,d})^* \star v$, *pour* $v \in \Pi_p(D)$, *est dense dans* $\Pi_p(D)$.

7. C'est le cas si D est irréductible ou, plus généralement, si $D^{\varphi=1} = \check{D}^{\varphi=1} = 0$, cf. [**17**, rem. V.14]

Démonstration. — Par dualité, cela revient à prouver que, si $\mu \in \Pi_p(D)^*$ est tué par $B_p^{c,d}$, alors $\mu = 0$.

On a $\Pi_p(D)^* \subset \check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1$, et on dispose de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : \check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \check{D}$ qui commute à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Soit $\mu \in \Pi_p^*(D)$, et soient $z_1 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu$ et $z_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \star \mu$. Alors $B_p^{c,d} \star \mu = 0$ si et seulement si $B_p^{c,d} \star z_1 = 0$ et $B_p^{c,d} \star z_2 = 0$. Or :

$$B_p^{c,d} \star z_1 = (c^2 - \sigma_c)(c^{-2} - \delta(c^{-1})\sigma_c) \cdot z_1$$
$$B_p^{c,d} \star z_2 = (c^2 - \delta(c)\sigma_{c^{-1}})(c^{-2} - \sigma_{c^{-1}}) \cdot z_2$$

où $\delta = (x|x|)(\det V)^{-1}$. Si $B_p^{c,d} \star \mu = 0$, les Γ-modules engendrés par z_1 et z_2 sont de rang ≤ 2 sur $\mathscr{O}_L$. On en déduit pour commencer, en utilisant [**12**, prop. III.4.8] (combinée avec l'isomorphisme $\check{D}^{\mathrm{nr}} = \mathbf{D}^{\mathrm{nr}}(\check{V})$ de la preuve de [**12**, prop. II.2.2] et le (ii) de [**12**, rem. II.1.2]), que z_1 et z_2 appartiennent au sous-module $(W(\overline{\mathbf{F}}_p) \otimes \check{V}^{H'})^H$ de $\check{D}$, où $H' = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}})$. Puis que $\check{V}$ a une droite stable par H' et tuée par $\sigma_c - c^2$ ou par $\sigma_c - c^{-2}\delta(c)$, et enfin que V a une droite quotient stable par H' et tuée par $\sigma_c - c^{-1}$ ou par $\sigma_c - c^3\delta^{-1}(c)$.

Ceci implique le résultat annoncé. □

2.3. Vecteurs localement algébriques

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est de rang 2, on note $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ le sous-espace de $\Pi_p(D)$ des vecteurs localement algébriques. Alors $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ si et seulement si D est de Rham, à poids distincts [**13**, th. 0.20], [**23**] ou [**15**, th. 2.5].

Remarque 2.6. — Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, de Rham, de rang 2, à poids de Hodge-Tate distincts.

(i) Si D est irréductible, alors $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\Pi_p(D)$.

(ii) Si D n'est pas irréductible, l'adhérence Π_1 de $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ est une sous-représentation stricte de $\Pi_p(D)$: c'est soit une série principale, auquel cas $\Pi_p(D)/\Pi_1$ est aussi une série principale, soit une tordue de la steinberg continue auquel cas $\Pi_p(D)/\Pi_1$ est une extension non scindée d'une série principale par un caractère.

(iii) Si D n'est pas irréductible mais n'est pas la somme directe de deux caractères, alors $\mathrm{End}(D) = \mathrm{End}(\Pi_p(D)) = L$ car la condition sur les poids implique que D n'est pas l'extension d'un objet de rang 1 par lui-même ; en particulier, un élément de $\mathrm{End}(\Pi_p(D))$ est complètement déterminé par sa restriction à $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ même si ce dernier espace n'est pas dense.

2.3.1. Modèle de Kirillov. — Si D est de Rham, à poids $k_1 < k_2$, le sous-espace $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ des vecteurs localement algébriques de $\Pi_p(D)$ est non nul et de la forme $\Pi^{\mathrm{lisse}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-1} \otimes \det^{k_1}$, où $k = k_2 - k_1$ et Sym^k est la puissance symétrique de la représentation (de dimension 2) naturelle de G.

On note D_{dR} le L-espace $D_{\mathrm{dif}}^{\Gamma}$. Il est muni de la filtration décroissante induite par celle de D_{dif}, et on a $D_{\mathrm{dR}}^{-k_2} = D_{\mathrm{dR}}$, $D_{\mathrm{dR}}^{-k_1+1} = 0$, tandis que $D_{\mathrm{dR}}^{-k_2+1} = D_{\mathrm{dR}}^{-k_1}$ est une droite.

On a $D_{\mathrm{dif}}^{+} = t^{k_2} L_\infty[[t]] \otimes D_{\mathrm{dR}}^{-k_2} + t^{k_1} L_\infty[[t]] \otimes D_{\mathrm{dR}}^{-k_1}$. On pose

$$X_\infty^- = (t^{k_1} L_\infty[[t]] \otimes D_{\mathrm{dR}}^{-k_2})/D_{\mathrm{dif}}^+ = (t^{k_1} L_\infty[t]/t^{k_2} L_\infty[t]) \otimes (D_{\mathrm{dR}}^{-k_2}/D_{\mathrm{dR}}^{-k_1})$$
$$X_\infty^+ = D_{\mathrm{dif}}^+/(t^{k_2} L_\infty[[t]] \otimes D_{\mathrm{dR}}^{-k_2}) = (t^{k_1} L_\infty[t]/t^{k_2} L_\infty[t]) \otimes D_{\mathrm{dR}}^{-k_1}$$

On dispose (cf. [**13**, prop. VI.5.6] ou [**15**, prop. 2.10]) d'un modèle de Kirillov pour $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$, i.e. d'une injection $v \mapsto \mathscr{K}_v$, naturelle, P-équivariante, de $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ dans l'espace $\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$ des $\phi : \mathbf{Q}_p^* \to X_\infty^-$

— à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ (c'est la signification du « rc »),

— vérifiant $\sigma_a(\phi(x)) = \phi(ax)$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$ (invariance par Γ),

muni de l'action suivante de P :

$$\big(\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \phi\big)(x) = [\varepsilon^{bx}]\phi(ax) \quad (\text{Si } x \in \mathbf{Q}_p, \text{ alors } [\varepsilon^x] = \mathbf{e}_p(x) e^{-tx}.)$$

De plus, l'image de $\Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ par $v \mapsto \mathscr{K}_v$ contient $\mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma$ et cet espace est de codimension finie dans l'image : le quotient est $J(\Pi^{\mathrm{lisse}}) \otimes \mathrm{Sym}^{k-1} \otimes \det^{k_1}$, où $J(\Pi^{\mathrm{lisse}})$ est le module de Jacquet de Π^{lisse} et est de dimension 0 si Π^{lisse} est supercuspidale, de dimension 1 si Π^{lisse} est un twist de la steinberg, et de dimension 2 si Π^{lisse} est une série principale (i.e. l'induite d'un caractère du borel) irréductible.

2.3.2. Modèle de Kirillov et dualité. — Le (φ, Γ)-module $\check{D}$ est aussi de Rham, à poids de Hodge-Tate $1 - k_2, 1 - k_1$. On note $\langle\ ,\ \rangle : \check{D}_{\mathrm{dif}} \times D_{\mathrm{dif}} \to L_\infty((t))dt$ l'accouplement naturel (on a $dt = \frac{dT}{1+T}$ car $t = \log(1+T)$). Alors

$$\langle \check{x}, y \rangle_{\mathrm{dR}} = \mathrm{rés}_{t=0} \langle \check{x}, y \rangle ,$$

où $\mathrm{rés}_{t=0}(\sum a_n t^n dt) = a_{-1}$, induit un accouplement parfait sur $\check{D}_{\mathrm{dR}} \times D_{\mathrm{dR}}$.

On note $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}} : \check{D}_{\mathrm{dif}} \times D_{\mathrm{dif}} \to L$ l'accouplement bilinéaire défini par

$$\{\check{x}, y\}_{\mathrm{dif}} = \lim_{n \to +\infty} p^{-n} \mathrm{Tr}_{L_n/L}\big(\mathrm{rés}_{t=0}(\langle \sigma_{-1}(\check{x}), y \rangle)\big).$$

On a $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}} = \frac{p-1}{p} \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ sur $\check{D}_{\mathrm{dR}} \times D_{\mathrm{dR}}$.

L'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$ est identiquement nul sur $\check{D}_{\mathrm{dif}}^+ \times D_{\mathrm{dif}}^+$ et induit un accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}} : \check{X}_\infty^+ \times X_\infty^- \to L$.

Le résultat suivant [**13**, prop. VI.5.12] ou [**15**, prop. 2.13] sera crucial.

Proposition 2.7. — *Si $v \in \Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$ est tel que $\mathscr{K}_v$ est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$, et si $\mu \in \Pi_p(D)^*$, alors*

$$\{\mu, v\} = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \big\{\iota_N\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\mu\big)\big), \mathscr{K}_v(p^i)\big\}_{\mathrm{dif}} , \tag{2.8}$$

pour tout N assez grand (dépendant de v ; l'expression a un sens pour $N \geq m(D)$ car $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \Pi_p(D)^* \subset \check{D}^{(0, m(D)]}$).

2.3.3. Une formule explicite. — Comme $\mathbf{Q}_p^* = \sqcup_{n\in\mathbf{Z}} p^{-n}\mathbf{Z}_p^*$, on a

$$\mathrm{LP}_c(\mathbf{Q}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{LP}(\mathbf{Z}_p^*, X_\infty^-)^\Gamma.$$

Soit $\check{e}^+$ une base de $\check{D}_{\mathrm{dR}}^{k_2-1}$. Alors $\check{e}^+$ induit un isomorphisme $X_\infty^-(D) \overset{\sim}{\to} t^{k_1}L_\infty[t]/t^{k_2}L_\infty[t]$, avec $\check{e}^+(x)\frac{dt}{t} = \langle \check{e}^+, x\rangle$, et une injection

$$\check{e}^+ : \Pi_p(D)^{\mathrm{alg}} \to \mathrm{LP}(\mathbf{Q}_p^*, \tfrac{t^{k_1}L_\infty[t]}{t^{k_2}L_\infty[t]})^\Gamma.$$

Si e^- est la base de $D_{\mathrm{dR}}^{-k_2}/D_{\mathrm{dR}}^{-k_1}$ duale de $\check{e}^+$, on a

$$\mathscr{K}_v = \check{e}^+(v)\, e^-. \tag{2.9}$$

Proposition 2.10. — *Soient :*

- $\mu \in \Pi_p(D)^*$ *invariant par* $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,
- $\lambda \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \check{V}(D))$ *vérifiant* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu) = \sigma_{-1}\cdot \mathrm{Exp}^*(\lambda)$.

Si $v \in \Pi_p(D)^{\mathrm{alg}}$, *alors*

$$\exp^*\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \check{e}^+(v)\,\lambda\Big) = \big\{\mu, v\big\}\check{e}^+$$

Démonstration. — La formule à démontrer est équivalente à

$$\big\{\mu, v\big\} = \Big\langle \exp^*\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \check{e}^+(v)\,\lambda\Big), e^-\Big\rangle_{\mathrm{dR}},$$

et on peut utiliser la formule (2.8) pour évaluer le membre de gauche. Notons ϕ la fonction $\check{e}^+(v)$; son invariance par Γ implique qu'il existe $\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_2-1} \in L_\infty$ tels que l'on ait

$$\phi(x) = \sigma_x(\alpha_{k_1})(tx)^{k_1} + \cdots + \sigma_x(\alpha_{k_2-1})(tx)^{k_2-1}.$$

L'invariance de μ par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et la prop. 2.7 fournissent, pour N assez grand, la formule

$$\begin{aligned}\big\{\mu, v(\phi)\big\} &= \big\{\iota_N(\sigma_{-1}\cdot \mathrm{Exp}^*(\lambda)), \phi(1)e^-\big\}_{\mathrm{dif}} \\ &= p^{-N}\mathrm{Tr}_{L_N/L}\big(\mathrm{rés}_{t=0}(\langle \iota_N(\mathrm{Exp}^*(\lambda)), \phi(1)e^-\rangle)\big),\end{aligned}$$

la seconde égalité venant de la définition de $\{\ ,\ \}_{\mathrm{dif}}$. D'après la prop. 2.3,

$$p^{-N}\iota_N(\mathrm{Exp}^*\lambda) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \exp^*\int_{1+p^N\mathbf{Z}_p} x^i\lambda, \quad \text{avec } \exp^*\int_{1+p^N\mathbf{Z}_p} x^i\lambda \in t^{-i}L_N\otimes \check{D}_{\mathrm{dR}}.$$

Donc

$$\mathrm{rés}_{t=0}(\langle p^{-N}\iota_N(\mathrm{Exp}^*(\lambda)), \phi(1)e^-\rangle) = \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \alpha_i \langle t^i \exp^*\int_{1+p^N\mathbf{Z}_p} x^i\lambda, e^-\rangle_{\mathrm{dR}}.$$

Il reste à prendre la trace, i.e. à appliquer l'opérateur $\sum_{a\in(\mathbf{Z}/p^N)^*}\sigma_a$, et on conclut en utilisant la formule

$$\sigma_a\big(t^i\exp^*\int_{1+p^N\mathbf{Z}_p} x^i\lambda\big) = t^i\exp^*\int_{a+p^N\mathbf{Z}_p} x^i\lambda. \quad \square$$

Remarque 2.11. — La formule ci-dessus pour l'action de Γ sur $\exp^*$ se justifie comme suit. Soit $V_n = \mathbf{Z}_p[G_n]\otimes V$, où $G_n = G_{\mathbf{Q}_p}/G_{\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})} \cong (\mathbf{Z}/p^n)^*$. Le lemme de Shapiro fournit un isomorphisme $H^1(G_{\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})}, V) \cong H^1(G_{\mathbf{Q}}, V_n)$: si $g\mapsto c_g$ est un 1-cocycle sur $G_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans V_n, on peut écrire c_g sous la forme $\sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n)^*}[\sigma_b]\otimes v_{b,g}$, et $g\mapsto v_{b,g}$ est un 1-cocycle sur $G_{\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})}$ à valeurs dans V, et l'application du lemme de Shapiro envoie $g\mapsto c_g$ sur $g\mapsto v_{1,g}$. Le cocycle $g\mapsto v_{b,g}$ correspond à $\int_{b+p^n\mathbf{Z}_p} c$.

Par définition de $\exp^*$, il existe $C\in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V_n$ et $v=\exp^*(c)\in(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V_n)^{G_{\mathbf{Q}_p}}$ tels que $c_g = (g-1)\cdot C + \log\chi(g)v$. Si on écrit v sous la forme $\sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n)^*}[\sigma_b]\otimes v_b$, avec $v_b\in(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V)^{G_{\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})}}$, alors $v_b=\exp^*(\int_{b+p^n\mathbf{Z}_p} c)$, et l'invariance de v par $G_{\mathbf{Q}_p}$ se traduit par $\sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n)^*}[\sigma_{\chi(g)b}]\otimes g(v_b) = \sum_{b\in(\mathbf{Z}/p^n)^*}[\sigma_b]\otimes v_b$. Si $\chi(g)=a$, identifiant les coefficients de $[\sigma_a]$, on obtient $\sigma_a(v_1)=v_a$, ce que l'on voulait.

2.4. Le $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_p)$-module $\Pi_p(D)$

On rappelle que $\widetilde{\mathbf{A}} = W(C^\flat)$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\mathscr{O}_{C^\flat})$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} = W(\mathfrak{m}_{C^\flat})$. On pose

$$\widetilde{\mathbf{A}}^- := \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^+,\quad \widetilde{\mathbf{B}}^- := \mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^-$$

On note $\tilde p = [p^\flat]\in\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$, avec $p^\flat = (p, p^{1/p},\dots)\in C^\flat$.

2.4.1. L'injection de $\Pi_p(V)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes V$. — Soit $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\Lambda)$, de rang 2, avec $\Lambda = \mathscr{O}_{\mathscr{E}},\mathscr{E}$, et soit $V=V(D)$. Soient $\widetilde{D} = (\widetilde{\mathbf{A}}\otimes V)^H$ et $\widetilde{D}^+ = (\widetilde{\mathbf{A}}^+\otimes V)^H$. D'après [**13**, cor. II.2.9] et [**17**, rem. III.27], on a une suite exacte de P-modules [8]

$$0\to\widetilde{D}/\widetilde{D}^+\to\Pi_p(D)\to M\to 0,$$

où M est un sous-quotient de $D^\sharp/D^\natural$ et U agit trivialement sur $D^\sharp/D^\natural$ qui est de type fini sur $\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Q}_p$. On peut compléter cet énoncé de la manière suivante.

Proposition 2.12. — *On dispose d'une injection P-équivariante* [9]

$$\Pi_p(D)\hookrightarrow(\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes V)^H$$

prolongeant l'inclusion naturelle $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+\hookrightarrow(\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes V)^H$.

Démonstration. — Soit $z\in M$. Choisissons $\tilde z\in\Pi_p(D)$ relevant z. Comme U agit trivialement sur M, on en déduit un 1-cocycle $u\mapsto z_u = (u-1)\cdot\tilde z$ sur U, à valeurs dans $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+\subset\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes V$. D'après le lemme 2.13 ci-dessous, il existe $c\in\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes V$, unique, tel que $z_u=(u-1)\cdot c$. Comme $\sigma(z_u)=z_u$, pour tout $\sigma\in H$, l'unicité de c implique $c\in(\widetilde{\mathbf{A}}^-\otimes V)^H$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.13. — *On a*

$$H^0(U,\widetilde{\mathbf{A}}^-)=0\quad\text{et}\quad H^1(U,\widetilde{\mathbf{A}}^-)=0.$$

8. L'action de P sur $\widetilde{D},\widetilde{D}^+$ est $\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v = [\varepsilon^b]\,\varphi^k(\sigma_a(v))$, si $k\in\mathbf{Z}$, $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et $b\in\mathbf{Q}_p$.
9. Même action que ci-dessus sur le membre de droite.

Démonstration. — On utilise la suite exacte $0 \to \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{A}}^- \to 0$ et la suite exacte longue de cohomologie associée.

• Comme U est la limite inductive des $\mathbb{U}(p^{-n}\mathbf{Z}_p)$ qui sont procycliques, on a $H^2(U, M) = 0$ pour tout module M muni d'une action continue de U.

• L'action de $u(b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ est la multiplication par $[\varepsilon^b]$. On en déduit que $H^0(U, \widetilde{\mathbf{A}}) = 0$.

• Si $u \mapsto z_u$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, on a $([\varepsilon^a] - 1)z_{u(b)} = ([\varepsilon^b] - 1)z_{u(a)}$ pour tous $a, b \in \mathbf{Q}_p$. Il s'ensuit que $z = \frac{1}{[\varepsilon^a]-1} z_{u(a)}$ ne dépend pas du choix de a, et $u \mapsto z_u$ est le bord de z. On en déduit que $H^1(U, \widetilde{\mathbf{A}}) = 0$.

• Si $z_u \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ pour tout u, cela implique que $([\varepsilon^a] - 1)z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ pour tout $a \in \mathbf{Q}_p$. En reduisant modulo p, et en prenant $a = p^{-n}$, on en déduit que $v_E((\varepsilon - 1)^{p^{-n}}\overline{z}) \geq 0$, pour tout n ; en faisant tendre n vers $+\infty$, on en tire $\overline{z} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. On peut appliquer ce qui précède à $\frac{1}{p}(z - [\overline{z}])$ et une récurrence immédiate suivie d'un passage à la limite permet d'en déduire $z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$. Il en résulte que $H^1(U, \widetilde{\mathbf{A}}^+) = 0$

Le résultat s'en déduit via la suite exacte longue de cohomologie. □

2.4.2. Le modèle de Kirillov de $\Pi_p(V) \otimes V^*$. — D'après la prop. 2.12, $\Pi_p(V)$ est naturellement un sous-P-module de $(\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes V)^H$. On dispose donc d'une application naturelle

$$\omega : \Pi_p(V) \otimes V^* \to \widetilde{\mathbf{B}}^-, \quad (a \otimes v) \otimes \check{v} \mapsto \langle \check{v}, v \rangle\, a$$

(Si V est une $\mathscr{O}_L$-représentation, alors ω est à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}^-$.)

On peut utiliser $\omega : \Pi_p(V) \otimes V^* \to \widetilde{\mathbf{B}}^-$ pour fabriquer un modèle de Kirillov : on pose

$$\mathscr{K}_{p,v\otimes\check{v}}(x) = \left\langle \check{v}, \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \right\rangle, \quad \text{si } v \in \Pi_p(V) \text{ et } \check{v} \in V^*$$

Cela fournit une application P-équivariante (non nécessairement injective) :

$$\mathscr{K}_p : \Pi_p(V) \otimes V^* \to \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \widetilde{\mathbf{B}}^-), \quad \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\phi\right)(x) = [\varepsilon^{bx}]\phi(ax)$$

De plus, on a les relations suivantes :

$$\sigma(\mathscr{K}_{p,v\otimes\check{v}}(x)) = \left\langle \sigma(\check{v}), \left(\begin{smallmatrix} \chi(\sigma)x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \right\rangle = \mathscr{K}_{p,\sigma(v\otimes\check{v})}(\chi(\sigma)x)$$
$$\varphi(\mathscr{K}_{p,v\otimes\check{v}}(x)) = \left\langle \check{v}, \left(\begin{smallmatrix} px & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v \right\rangle = \mathscr{K}_{p,v\otimes\check{v}}(px)$$

Si on fait agir φ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \widetilde{\mathbf{B}}^-)$ par

$$(\varphi \cdot \phi)(x) = \varphi(\phi(p^{-1}x)), \quad (\sigma \cdot \phi)(x) = \sigma(\phi(\chi(\sigma)^{-1}x))$$

les relations ci-dessus se traduisent par le fait que $\mathscr{K}_p$ est φ et $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante.

Si V est la restriction d'une représentation $\widetilde{V}$ de $G_{\mathbf{Q}}$, on peut étendre $\mathscr{K}_p$ en une application $G_{\mathbf{Q}} \times G$-équivariante

$$\widetilde{\mathscr{K}_p} : \Pi_p(V) \otimes V^* \to \mathrm{Ind}_{G_{\mathbf{Q}_p} \times P}^{G_{\mathbf{Q}} \times G} \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \widetilde{\mathbf{B}}^-), \quad \widetilde{\mathscr{K}_{p,w}}(\sigma, g) = \mathscr{K}_{p,(\sigma\otimes g)\cdot w}$$

Proposition 2.14. — *Si $\widetilde{V}$ est absolument irréductible, alors $\widetilde{\mathscr{K}_p}$ est injective.*

Démonstration. — Le noyau est stable par $G_{\mathbf{Q}} \times P$, et donc est de la forme $\Pi \otimes \widetilde{V}^*$, où Π est une sous-P-représentation de $\Pi_p(V)$, puisque $\widetilde{V}$ est supposée absolument irréductible. On veut prouver que $\Pi = 0$; supposons le contraire. Quitte à remplacer Π par une sous-P-représentation, on peut supposer que Π est une composante du P-socle de $\Pi_p(V)$.

• Si V est irréductible, alors $\Pi = \Pi_p(V)$ et on obtient une contradiction car ω n'est pas identiquement nulle sur $\Pi_p(V) \otimes V^*$.

• Si la semi-simplifiée de V est $\chi_1 \oplus \chi_2$, alors il existe $i = 1, 2$ tel que $\Pi \subset B(\chi_i, \chi_{3-i})$ (le quotient est de dimension ≤ 1 sur L) et alors χ_i^{-1} est un quotient de V^*. Dans ce cas, la restriction de $\mathscr{K}_p$ à $\Pi \otimes V^*$ se factorise à travers $\Pi \otimes \chi_i^{-1}$ et l'application induite est celle obtenue en remplaçant V par χ_i (i.e. $\Pi \subset (\widetilde{\mathbf{B}}^- \otimes \chi_i)^H$ et $\mathscr{K}_p$ envoie $(a \otimes \chi_i) \otimes \chi_i^{-1}$ sur a) ; cette application est injective, ce qui conduit à une contradiction. $\square$

2.4.3. Conséquences de l'existence d'un modèle de Kirillov pour $\Pi \otimes V$. — Les résultats de ce n$^{\mathrm{o}}$ nous serviront pour établir une compatibilité local-global pour la correspondance de Langlands locale p-adique (th. 12.4).

Lemme 2.15. — *Soit W une $\mathscr{O}_L$-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$, de rang fini. S'il existe une flèche $\widetilde{\mathbf{A}}^+$-linéaire $\mathscr{K} : \widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes W \to \widetilde{\mathbf{A}}^-$, non nulle, commutant aux actions de $G_{\mathbf{Q}_p}$ et φ, alors $(W^*)^{G_{\mathbf{Q}_p}} \neq 0$.*

Démonstration. — Soit e_i, $i \in I$, une base de W. Si $n \geq 1$, soit $x_n \in \widetilde{\mathbf{A}}$ un relèvement de $\mathscr{K}(\tilde{p}^{-n} \otimes e_i)$. Alors $\tilde{p}\, x_{n+1} - x_n \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ et donc $\tilde{p}^n x_n$ converge vers un élément $\mathscr{K}(e_i) \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$. On a alors $\mathscr{K}(\tilde{p}^{-n} \otimes e_i) = \mathscr{K}(e_i)\tilde{p}^{-n}$; on en déduit que $\mathscr{K}(\sum_i a_i e_i) = \sum_i \mathscr{K}(e_i) a_i$, si les a_i appartiennent à $\widetilde{\mathbf{A}}^-$ (si $k \geq 1$, il existe n tel que $\tilde{p}^n a_i \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ modulo $p^k \widetilde{\mathbf{A}}$ et on déduit le résultat en passant à la limite sur k). Autrement dit, $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathbf{A}}^+}(\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes W, \widetilde{\mathbf{A}}^-) = \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes W^*$. L'invariance de $\mathscr{K}$ par φ se traduit par son appartenance à $(\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes W^*)^{\varphi=1} = W^*$ et son invariance par $G_{\mathbf{Q}_p}$ par son appartenance à $(W^*)^{G_{\mathbf{Q}_p}}$. $\square$

Proposition 2.16. — *Soit V une L-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$, et soit Π une représentation unitaire de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$. S'il existe une flèche $G_{\mathbf{Q}_p} \times \left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{Z}} & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariante*[10] *$\Pi \otimes V \to \widetilde{\mathbf{B}}^-$, non nulle, alors il existe des flèches $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariantes $V \to \mathbf{V}(\Pi)^*$ et $\mathbf{V}(\Pi) \to V^*$, non nulles.*

Démonstration. — Quitte à multiplier notre flèche initiale par p^k, on peut choisir des $\mathscr{O}_L$-réseaux V_0 et Π_0 de V et Π, stables par $G_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$, tels que la restriction à $\Pi_0 \otimes V_0$ soit à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{A}}^-$ (car Π est de longueur finie comme $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$-module topologique). On a $\Pi_0 \subset (\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \mathbf{V}(\Pi_0))^H$ et la commutation à l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ équivaut à ce que la flèche soit $W((\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}])^\flat) = \widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}$-linéaire, ce qui permet de

10. $G_{\mathbf{Q}_p}$ agissant par $\left(\begin{smallmatrix} \chi(\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \sigma$ sur le terme de gauche.

l'étendre en une flèche $\widetilde{\mathbf{A}}^+$-linéaire $\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes (V_0 \otimes \mathbf{V}(\Pi_0)) \to \widetilde{\mathbf{A}}^-$ qui commute à $G_{\mathbf{Q}_p}$ et à φ (qui encode l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$). On peut donc appliquer le lemme 2.15 à $W = V_0 \otimes \mathbf{V}(\Pi_0)$ pour en déduire le résultat. $\square$

Remarque 2.17. — Si Π est irréductible, $\mathbf{V}(\Pi)$ est irréductible (en effet, Π est isomorphe à $\Pi_p(\mathbf{V}(\Pi))$ à des représentations de dimension finie près, et l'irréductibilité de $\mathbf{V}(\Pi)$ résulte de [**13**, rem. II.2.3]). La prop. 2.16 restreint donc fortement les V pour lesquelles $\Pi \otimes V$ admet une flèche équivariante non nulle vers $\widetilde{\mathbf{B}}^-$.

3. Correspondances de Langlands en famille

Dans ce chapitre, on construit la représentation $\Pi(\rho_T)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ associée à une T-représentation de $G_{\mathbf{Q}}$. Cette représentation est obtenue en prenant un réseau naturel du modèle de Whittaker du produit tensoriel restreint de représentations $\Pi_\ell(\rho_T)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ associées aux restrictions de ρ_T aux $G_{\mathbf{Q}_\ell}$. La construction des $\Pi_\ell(\rho_T)$ est différente selon que $\ell = p$ (cf. § 3.3) ou $\ell \neq p$ (cf. § 3.4). On termine par la définition du modèle de Kirillov de $\rho_T \otimes \Pi(\rho_T^\diamond)$.

3.1. Quelques notations

3.1.1. L'espace $\mathscr{X}$. — Soient T une $\mathscr{O}_L$-algèbre noethérienne locale [11] complète, réduite, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_T$ et de corps résiduel $k_L \cong \mathbf{F}_q$.

Si M est un T-module, on définit des duaux M^* et $M^\diamond$ par :

$$M^* := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(M, \mathscr{O}_L), \quad M^\diamond := \mathrm{Hom}_T(M, T)$$

Remarque 3.1. — On peut décomposer $T[\frac{1}{p}]$ sous la forme $\prod_{i\in I} \Lambda_i$, où I est fini et Λ_i est connexe. Soit $e_i \in T[\frac{1}{p}]$ l'idempotent correspondant à Λ_i, et soit $T_i := e_i T$. Alors $\Lambda_i = T_i[\frac{1}{p}]$, et $T \hookrightarrow \prod_i T_i$ et le quotient est tué par une puissance de p, ce qui permet de ramener beaucoup de questions au cas où T est connexe.

Soient $\mathscr{X} := \mathrm{Spec}\, T$ et $\mathscr{X}' := \mathrm{Spec}\, T[\frac{1}{p}]$. Alors $\mathscr{X}'$ est un ouvert de $\mathscr{X}$ dont les composantes connexes sont les $\mathscr{X}'_i := \mathrm{Spec}\, T_i[\frac{1}{p}]$.

Les composantes irréductibles de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$ sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux de T ; on note $\mathscr{X}_\mathfrak{a}$ et $\mathscr{X}'_\mathfrak{a}$ les composantes correspondant à $\mathfrak{a}$ (i.e. $\mathscr{X}_\mathfrak{a} = \mathrm{Spec}(T/\mathfrak{a})$)

Si $\mathfrak{p} \in \mathscr{X}$, on note $\kappa(\mathfrak{p})$ son corps résiduel. On dit que $\mathfrak{p}$ est *un point de $\mathscr{X}$* si $\kappa(\mathfrak{p})$ est une extension finie de L ; ces points correspondent donc aux idéaux maximaux de $T[\frac{1}{p}]$.

11. Ce qui suit s'applique à une algèbre semi-locale : il suffit de l'écrire comme produit d'algèbres locales et de prendre le produit des correspondances pour chaque composante.

3.1.2. La représentation ρ_T. — Soit $\rho_T : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathbf{GL}_2(T)$ une T-représentation continue de $G_{\mathbf{Q},S}$. Si $T \to \Lambda$ est un morphisme d'anneaux, on pose $\rho_\Lambda := \Lambda \otimes_T \rho_T$, et on note simplement $\overline{\rho}_T$ la représentation $\rho_{T/\mathfrak{m}_T} = k_L \otimes_T \rho_T$.

On dit qu'un point $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{X}$ est *ℓ-problématique* (resp. *ℓ-pathologique*), si la restriction de $\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}$ à $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ est $\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$ et si celle de $\rho_{\kappa(\mathfrak{a})}$ est $\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_p & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$, avec $*$ non scindé, pour au moins un (resp. pour tout) idéal premier minimal $\mathfrak{a}$ contenu dans $\mathfrak{p}$. Les points ℓ-problématiques sont contenus dans un fermé de Zariski de codimension ≥ 1.

On dit que $\mathfrak{p}$ est *p-pathologique* si la restriction de $\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon_p \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$.

Si ℓ est un nombre premier, on sait associer à ρ_T (ou plutôt à sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_\ell}$) une T-représentation $\Pi_\ell(\rho_T)$ et une k_L-représentation $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$. La recette est différente suivant que $\ell = p$ ou que $\ell \neq p$, et les spécialisations se comportent mal aux points problématiques ce qui nous conduit à introduire les notions suivantes.

Si $\ell \neq p$, on note $\Pi_\ell^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ le socle de $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$; on a $\Pi_\ell^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) = \Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ sauf si la restriction de $\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}$ à $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ est $\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$ auquel cas le quotient est de dimension 1.

Si $\ell = p$, on pose $\Pi_p^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) = \Pi_p(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ si $\mathfrak{p}$ n'est pas p-pathologique. Si $\mathfrak{p}$ est p-pathologique, $\Pi_p^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ est la représentation définie dans la rem. 2.1.

3.2. La correspondance modulo p

Commençons par la définition de $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$.

• Si $\ell \neq p$, il existe ([**27**, th. 4.3.1], [**28**, th. 5.1.5], [**38**]) une unique k_L-représentation $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ vérifiant :

(i) $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$ est de socle générique et irréductible, et le quotient par le socle est de dimension finie sur k_L.

(ii) Si $\rho : G_{\mathbf{Q}_\ell} \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_K)$ est un relèvement de $k_K \otimes \overline{\rho}_T$, et si $\Pi_\ell(\rho)$ est l'unique réseau de $\Pi_\ell(K \otimes_{\mathscr{O}_K} \rho)$ tel que $k_K \otimes \Pi_\ell(\rho)$ vérifie (i), alors $k_K \otimes \Pi_\ell(\rho) \hookrightarrow \Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$.

(iii) $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$ est minimale relativement aux conditions (i) et (ii).

On note $\Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho}_T)$ le socle de $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$.

Si $\overline{\rho}_T$ est non ramifiée, on définit $\Pi_\ell^{\mathrm{nr}}(\overline{\rho}_T)$ comme $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_\ell(\rho)$ pour n'importe quel relèvement non ramifié ρ de $\overline{\rho}_T$. On a

$$\Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho}_T) \hookrightarrow \Pi_\ell^{\mathrm{nr}}(\overline{\rho}_T) \hookrightarrow \Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$$

• Si $\ell = p$, il existe une unique k_L-représentation $\Pi_p(\overline{\rho}_T)$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ vérifiant :

(i) $\Pi_p(\overline{\rho}_T)$ n'a pas de sous-$k_L[\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)]$-module non nul, de dimension finie sur k_L.

(ii) $\mathbf{V}(\Pi_p(\overline{\rho}_T)) = \overline{\rho}_T$.

(iii) $\Pi_p(\overline{\rho}_T)$ est maximale relativement aux conditions (i) et (ii).

On note $\Pi_p^{\min}(\overline{\rho}_T)$ la représentation minimale vérifiant (ii).

Remarque 3.2. — Dans tous les cas (y compris $\ell = p$), le quotient $\Pi_\ell(\overline{\rho}_T)/\Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho}_T)$ est de dimension finie sur k_L. En fait, on a

$$\Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho}_T) = \Pi_\ell(\overline{\rho}_T)$$

sauf dans les cas suivants :

• $\ell \neq p$ et $\overline{\rho}_T \cong \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_p & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$, où le quotient est de dimension 1 ou 2 (voire 3 si $p = 2$), suivant la valeur de $*$ et la classe de ℓ modulo p.

• $\ell = p$ et $\overline{\rho}_T \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon_p \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$, où le quotient est de dimension 2 (3 si $p = 2$).

3.3. Le cas $\ell = p$

Le T-module $\Pi_p(\rho_T)$ est la boule unité d'un L-banach, le $\mathscr{O}_L$-dual $\Pi_p^*(\rho_T)$ de $\Pi_p(\rho_T)$ est un T-module compact et même un $T[[K]]$-module de type fini, si K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$.

Soit $T_n := T/\mathfrak{m}_T^n$; c'est une $\mathscr{O}_L$-algèbre de longueur finie. Soit $\rho_n = T_n \otimes_T \rho_T^\diamond$, et soit $\rho_n^\vee$ son dual de pontryagin. On a une suite exacte $0 \to \rho_1^{\oplus r_n} \to \rho_n \to \rho_{n-1} \to 0$, et donc une suite exacte $0 \to \rho_{n-1}^\vee \to \rho_n^\vee \to (\rho_1^\vee)^{\oplus r_n} \to 0$. Posons [12]

$$\Pi_p(\rho_n^\vee) := (D(\rho_n^\vee) \boxtimes \mathbf{P}^1)/(D(\rho_n^\vee)^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1)$$

Si $\overline{\rho}_T$ n'est pas de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$, alors on a une suite exacte

$$0 \to \Pi_p(\rho_{n-1}^\vee) \to \Pi_p(\rho_n^\vee) \to \Pi_p(\rho_1^\vee)^{\oplus r_n} \to 0$$

Si $\overline{\rho}_T$ est de la forme ci-dessus, on a une suite exacte

$$0 \to \Pi_p(\rho_{n-1}^\vee)' \to \Pi_p(\rho_n^\vee) \to \Pi_p(\rho_1^\vee)^{\oplus r_n} \to 0$$

où $\Pi_p(\rho_{n-1}^\vee)'$ contient $\Pi_p(\rho_{n-1}^\vee)$ et le quotient est de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$. Soit alors $\Pi_p((\rho_T^\diamond)^\vee) := \varinjlim_n \Pi_p(\rho_n^\vee)$, et soit ($T_p$ désigne le module de Tate)

$$\Pi_p(\rho_T) := T_p(\Pi_p((\rho_T^\diamond)^\vee))$$

En tant que T-module, $\Pi_p(\rho_n^\vee)$ est une somme directe de copies de $T_n^\vee$ (au moins dans le cas générique ; dans le cas exceptionnel, c'est le cas à un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie près). Il s'ensuit que $\Pi_p(\rho_T)$ est une somme directe complétée de copies de $\check{T} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(T, \mathscr{O}_L)$, et donc que la T-torsion est dense dans $\Pi_p(\rho_T)$ (car elle est dense dans $\check{T}$).

Remarque 3.3. — (i) Soit $\rho_T^\clubsuit = (\rho_T^\diamond)^*$ (c'est aussi le module de Tate de $(\rho_T^\diamond)^\vee$, dual de Pontryagin de $\rho_T^\diamond$). La prop. 2.12 s'étend à ce cadre : on dispose d'une injection $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante

$$\Pi_p(\rho_T) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \widehat{\otimes} \rho_T^\clubsuit)^H.$$

(On a $\Pi_p(\rho_n^\vee) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \widehat{\otimes} \rho_n^\vee)$, et donc $\Pi_p((\rho_T^\diamond)^\vee) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \widehat{\otimes} (\rho_T^\diamond)^\vee)$, et on conclut en prenant le module de Tate des deux membres.)

12. Par construction, $\Pi_p(\rho_n^\vee)$ est la plus petite représentation Π de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ vérifiant $\mathbf{V}(\Pi) = \rho_n^\vee$.

(ii) Le caractère central de $\Pi_p(\rho_T)$ est
$$\omega_{\Pi_p} = (x|x|_p)^{-1}\det\rho_T.$$
(iii) Si $\mathfrak{p}$ est un point de $\mathscr{X}$, alors $\Pi_p(\rho_T)[\mathfrak{p}] \hookrightarrow \Pi_p(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ avec égalité sauf, peut-être, si $\mathfrak{p}$ est p-pathologique où l'on peut juste assurer que $\Pi_p^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) \hookrightarrow \Pi_p(\rho_T)[\mathfrak{p}]$.

(iv) On a $\Pi_p(\rho_T)^* \hookrightarrow D(\rho_T^\diamond(1))^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, avec égalité sauf, peut-être, si $\overline{\rho}_T \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon_p\end{smallmatrix}\right)$ en restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$, auquel cas, le quotient est de type fini sur T.

3.3.1. Le modèle de Kirillov. — Soit $\check{T} := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_L}(T, \mathscr{O}_L)$. On peut utiliser l'injection $\Pi_p(\rho_T) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \widehat{\otimes} \rho_T^\clubsuit)^H$ et l'accouplement tautologique $\langle\ ,\ \rangle : \rho_T^\diamond \times \rho_T^\clubsuit \to \mathscr{O}_L$ pour fabriquer un modèle de Kirillov (non nécessairement injectif), $T[\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}_p}]$-équivariant
$$\mathscr{K}_p : \rho_T^\diamond \otimes_T \Pi_p(\rho_T) \to \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \check{T}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\widetilde{\mathbf{A}}^-)$$
vérifiant :
$$\big\langle \mathscr{K}_{p,\check{v}\otimes v}(x), \lambda\big\rangle := \big\langle \lambda\check{v}, \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot v\big\rangle, = \big\langle \check{v}, \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot \lambda v\big\rangle, \qquad \text{si } \lambda\in T,\ \check{v}\in\rho_T^\diamond \text{ et } v\in\Pi_p(\rho_T)$$
Soit alors $\mathscr{K}_p^{\mathbb{G}}$ l'application $T[\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}]$-équivariante [13] :
$$\mathscr{K}_p^{\mathbb{G}} : \rho_T^\diamond \otimes_T \Pi_p(\rho_T) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}_p}}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}} \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \mathscr{O}_L\otimes\widetilde{\mathbf{A}}^-) \quad \mathscr{K}^{\mathbb{G}}_{p,v\otimes\check{v}}(g,\sigma) = \mathscr{K}_{p,(g,\sigma)\cdot(v\otimes\check{v})}$$

Proposition 3.4. — *Si $\overline{\rho}_T$ est absolument irréductible, $\mathscr{K}_p^{\mathbb{G}}$ est une isométrie sur son image.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\mathscr{K}_p^{\mathbb{G}}$ est injective modulo $\mathfrak{m}_L$. Le noyau est un $T[\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}]$-module, et il suffit donc de prouver que $\mathscr{K}_p^{\mathbb{G}}$ est injective sur le $T[\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}]$-socle de $M := k_L\otimes_{\mathscr{O}_L}(\rho_T^\diamond\otimes_T\Pi_p(\rho_T))$.

Le $T[\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}]$-socle de M est le $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}$-socle de $M[\mathfrak{m}_T]$. Or $M[\mathfrak{m}_T] = (\rho_T^\diamond/\mathfrak{m}_T)\otimes(k_L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Pi_p(\rho_T))[\mathfrak{m}_T] \hookrightarrow \overline{\rho}_T^\vee\otimes\Pi_p(\overline{\rho}_T)$ et son $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)\times G_{\mathbf{Q}}$-socle n'est autre que $\overline{\rho}_T^\vee\otimes\mathrm{soc}_{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)}(\Pi_p(\overline{\rho}_T))$ car $\overline{\rho}_T^\vee$ est supposée irréductible. Mais $\mathrm{soc}_{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)}(\Pi_p(\overline{\rho}_T^\vee))$ est une somme directe de représentations irréductibles de dimension infinie, et on est ramené à vérifier que $\mathscr{K}_p : V(\pi)^\vee\otimes\pi \to \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \widetilde{\mathbf{E}}^-)$ n'est pas identiquement nulle si π est une représentation irréductible de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, de dimension infinie. Ceci est clair. □

3.3.2. Un résultat de densité

Théorème 3.5. — *Soit $X\subset\mathscr{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est zariski-dense dans $\mathscr{X}$.*

(ii) *$\sum_{x\in X}\Pi_p(\rho_T)[\mathfrak{p}_x]$ est dense dans $\Pi_p(\rho_T)$.*

Démonstration. — Par dualité, on est ramené à prouver que $\cap_{x\in X}\mathfrak{p}_x\cdot(D(\rho_T^\diamond(1))^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1) = 0$ si et seulement si X est zariski-dense. Cela résulte de ce que $D(\rho_T^\diamond(1))^\natural\boxtimes\mathbf{P}^1$ est un T-module compact, sans T-torsion. □

13. Avec action naturelle de T sur le membre de droite, et les actions de $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ du n° 2.4.2.

On dit qu'un point $\mathfrak{p}$ de $\mathscr{X}$ est sympathique si la restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ de $\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}$ est irréductible, de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts. De manière équivalente, $\mathfrak{p}$ est sympathique si et seulement si $\Pi_p(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\Pi_p(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$.

Corollaire 3.6. — *Si les points sympathiques sont zariski-denses dans $\mathscr{X}$, alors $(\Pi_p(\rho_T)[\frac{1}{p}])^{\mathrm{alg}}$ est dense dans $\Pi_p(\rho_T)[\frac{1}{p}]$.*

3.4. Le cas $\ell \neq p$

3.4.1. Le $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$-module $\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$. — Si Λ est un $\mathbf{Z}_p$-module, on note $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$ l'espace

$$\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda) := \left\{ \phi : \mathbf{Q}_\ell^* \to \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}] \otimes \Lambda, \ \begin{array}{l} \text{localement constantes,} \\ \text{à support compact dans } \mathbf{Q}_\ell, \\ \sigma_a(\phi(x)) = \phi(ax) \ \forall a \in \mathbf{Z}_\ell^*, \ x \in \mathbf{Q}_\ell^* \end{array} \right\}$$

où σ_a agit sur $\mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}]$. On note

$$\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda) \subset \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$$

le sous-espace des fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_\ell^*$. On munit $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$ de l'action de $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$ donnée par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\phi\right)(x) := \mathbf{e}_\ell(bx)\phi(ax)$$

Le sous-espace $\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$ de $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$ est stable par $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$.

Lemme 3.7. — *Soient $\Lambda \subset \Lambda'$ des $\mathbf{Z}_p$-modules. Si M est un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda')$ stable par $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$, et si $M \cap \widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda') \subset \widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$, alors $M \subset \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, \Lambda)$*

Démonstration. — Si $\phi \in M$, alors $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & \ell^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right)\phi(x) = (\mathbf{e}_\ell(\ell^{-n}x) - 1)\phi(x) \in \Lambda$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Or $\mathbf{e}_\ell(\ell^{-n}x) - 1$ est inversible dans $\mathbf{Z}_p \otimes \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}]$ si $v_\ell(x) \leq n - 1$. Le résultat s'en déduit. □

3.4.2. Modèle de Kirillov et modèle de Whittaker. — Si π est une T-représentation π de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$, un *modèle de Kirillov pour* π est une injection $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariante $\mathscr{K}$: $\pi \to \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$. Il arrive (rarement) que l'on dise que $\mathscr{K}$ est un modèle de Kirillov même si $\mathscr{K}$ n'est pas injectif.

Remarque 3.8. — (i) Posons

$$\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), T) := \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)} \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$$

Comme $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*, \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_\ell] \otimes_{\mathbf{Z}} T) = \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_\ell] \otimes_{\mathbf{Z}} \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$ est l'induite de $\mathbb{U}(\mathbf{Q}_\ell)$ à $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$ du caractère $\mathbf{e}_\ell$, on a

$$\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_\ell] \otimes_{\mathbf{Z}} \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), T) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{U}(\mathbf{Q}_\ell)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)} \mathbf{e}_\ell$$

(induite à coefficients dans $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_\ell] \otimes_{\mathbf{Z}} T$).

(ii) Si $\mathscr{K}:\pi\to\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*,T)$ est un modèle de Kirillov d'une T-représentation π de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$, on peut étendre $\mathscr{K}$ en un modèle $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariant (*modèle de Whittaker*)

$$\mathscr{K}^{\mathbb{G}}:\pi\to\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),T),\quad \text{avec } \mathscr{K}_v^{\mathbb{G}}(g)=\mathscr{K}_{g\cdot v}(1).$$

On récupère $\mathscr{K}_v$ par $\mathscr{K}_v(x)=\mathscr{K}_v^{\mathbb{G}}\big(\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)$.

(iii) Le modèle de Kirillov est plus pertinent pour les applications arithmétiques à cause de son lien avec les q-développements de formes modulaires ; le modèle de Whittaker est plus facile à utiliser pour les purs problèmes de représentations car il est $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariant et pas seulement $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariant (ou $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariant en présence d'un caractère central).

Si $\mathscr{K}_v$ n'est pas divisible par $\mathfrak{m}_L$ dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*,T)$, alors $\mathscr{K}_v^{\mathbb{G}}$ n'est pas divisible par $\mathfrak{m}_L$ dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),T)$, mais la réciproque peut être fausse et donc π peut être p-saturée dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),T)$ sans l'être dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*,T)$ (c'est une des raisons qui font que le modèle de Whittaker est plus commode pour les purs problèmes de représentations).

3.4.3. Une construction possible de $\Pi_\ell(\rho_T)$. — Notre construction de $\Pi_\ell(\rho_T)$, pour $\ell\neq p$, est une variante de celle de Emerton et Helm **[28]**, (cf. n° 3.4.8 pour la comparaison avec la théorie de Emerton-Helm). On demande à $\Pi_\ell(\rho_T)$ d'être une T-représentation lisse de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$, sans T-torsion, interpolant la correspondance classique au sens que :

- $\kappa(\mathfrak{a})\otimes_T\Pi_\ell(\rho_T)=\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{a})})$ si $\mathfrak{a}$ est un idéal premier minimal de T.
- $\kappa(\mathfrak{p})\otimes_T\Pi_\ell(\rho_T)=\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$, si $\mathfrak{p}$ est un point de $\mathscr{X}$, sauf si $\mathfrak{p}$ est ℓ-problématique où $\kappa(\mathfrak{p})\otimes_T\Pi_\ell(\rho_T)=\Pi_\ell^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$.

La manière la plus rapide de construire un tel $\Pi_\ell(\rho_T)$ est de commencer par définir $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\mathrm{Fr}(T)})$ comme $\prod_{\mathfrak{a}}\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{a})})$, le produit portant sur les idéaux minimaux de T (l'anneau total des fractions $\mathrm{Fr}(T)$ est le produit des $\kappa(\mathfrak{a})$) identifié à son modèle de Whittaker (cf. rem. 3.8). Il suffit alors de poser

$$\Pi_\ell(\rho_T):=\Pi_\ell(\rho_{\mathrm{Fr}(T)})\cap\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),T)$$

l'intersection étant prise à l'intérieur de $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell),\mathrm{Fr}(T))$.

Comme cette définition est peu explicite, nous allons en donner une variante avec laquelle il est plus facile de faire des calculs. En particulier, nous aurons besoin d'une description précise dans le cas non ramifié, et nous traitons ce cas en détail (n$^{\mathrm{os}}$ 3.4.4 et 3.4.5, les calculs sont parfaitement classiques).

3.4.4. Modèle de Kirillov des induites paraboliques. — Soient $\chi_1,\chi_2:\mathbf{Q}_\ell^*\to T^*$ des caractères continus. Soit $I(\chi_2,\chi_1)$ l'induite parabolique

$$I(\chi_2,\chi_1):=\mathrm{Ind}_B^G\,(\chi_1\otimes|\ |_\ell^{-1}\chi_2)$$

définie par :

$$I(\chi_2,\chi_1)=\big\{\phi:\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)\to T,\ \phi\big(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)x\big)=\chi_1(a)\chi_2(d)|d|_\ell^{-1}\phi(x)\big\}$$

muni de l'action $(g\star\phi)(x)=\phi(xg)$. Nous allons étudier le modèle de Kirillov de $I(\chi_2,\chi_1)$.

Si $\phi\in I(\chi_2,\chi_1)$, on note $\bar\phi:\mathbf{Q}_\ell\to T$ la fonction

$$x\mapsto\bar\phi(x)=\phi\big(\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}1&-x\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big)=\phi\big(\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\big)\big)$$

L'identité

$$\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&x\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\big)=\big(\begin{smallmatrix}\frac{ad-bc}{a-cx}&-c\\0&a-cx\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&\frac{dx-b}{a-cx}\end{smallmatrix}\big)$$

fournit le résultat suivant.

Lemme 3.9. — *L'application $\phi\mapsto\bar\phi$ induit un isomorphisme*

$$I(\chi_2,\chi_1)\xrightarrow{\sim}\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_\ell,T)\oplus T\cdot\phi_\infty,\quad \textit{où } \phi_\infty:=\mathbf{1}_{\mathbf{Q}_\ell\smallsetminus\ell\mathbf{Z}_\ell}|\ |_\ell^{-1}\chi_2\chi_1^{-1}$$

et l'action de G sur l'espace de droite est donnée par

$$\big(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\big)\bar\phi(x)=\chi_1\big(\tfrac{ad-bc}{a-cx}\big)|a-cx|_\ell^{-1}\chi_2(a-cx)\bar\phi\big(\tfrac{dx-b}{a-cx}\big)$$

Si $\phi\in I(\chi_2,\chi_1)$, on note $\mathscr{K}_\phi$ la fonction définie par

$$\mathscr{K}_\phi(y):=\tfrac{1}{G(\chi_2)}\int_{\mathbf{Q}_\ell}\phi\big(\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}y&x\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big)\mathbf{e}_\ell(-x)\,dx$$

L'identité

$$\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}y&x\\0&1\end{smallmatrix}\big)=\big(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&y\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}1&x/y\\0&1\end{smallmatrix}\big)$$

nous donne

$$\mathscr{K}_\phi(y)=\mathscr{K}_{\bar\phi}(y):=\tfrac{1}{G(\chi_2)}\chi_1(-1)\chi_2(y)|y|_\ell^{-1}\int_{\mathbf{Q}_\ell}\bar\phi(-x/y)\mathbf{e}_\ell(-x)\,dx$$

L'application $\phi\mapsto\mathscr{K}_\phi$ ou $\bar\phi\mapsto\mathscr{K}_{\bar\phi}$ est le modèle de Kirillov de $I(\chi_2,\chi_1)$. On note $\mathscr{K}(\chi_1,\chi_2)$ l'image dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell,T)$ de l'application $\phi\mapsto\mathscr{K}_\phi$.

Lemme 3.10. — *Écrivons $\chi_2\chi_1^{-1}=\eta\,\mathrm{nr}_\beta$ avec $\eta(p)=1$ et $\mathrm{nr}_\beta(x)=\beta^{v_\ell(x)}$. Alors*[14]

$$\mathscr{K}_{\phi_\infty}=\begin{cases}\frac{\chi_2(-1)}{G(\chi_2)}\big(\frac{\ell\beta-1}{\ell\beta}\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\frac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}-\frac{1}{\ell}\mathbf{1}_{\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell}\chi_2\big) & \eta=1,\\ \beta^{-N}\frac{G(\chi_2\chi_1^{-1})G(\chi_1)}{G(\chi_2)}\chi_1(-1)\mathbf{1}_{\ell^{-N}\mathbf{Z}_\ell}\frac{\chi_1}{G(\chi_1)} & \eta \textit{ ramifié, de conducteur } \ell^N.\end{cases}$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{\phi_\infty}(y)&=\tfrac{1}{G(\chi_2)}\chi_1(-1)\chi_2(y)|y|_\ell^{-1}\int_{\mathbf{Q}_\ell\smallsetminus\ell y\mathbf{Z}_\ell}(|\ |_\ell^{-1}\chi_2\chi_1^{-1})(-x/y)\mathbf{e}_\ell(-x)\,dx\\&=\chi_2(-1)\tfrac{1}{G(\chi_2)}\chi_1(y)\int_{\mathbf{Q}_\ell\smallsetminus\ell y\mathbf{Z}_\ell}|x|_\ell^{-1}\chi_2\chi_1^{-1}(x)\mathbf{e}_\ell(-x)\,dx\end{aligned}$$

On peut découper cette intégrale en $\sum_{n\le v_\ell(y)}\int_{\ell^n\mathbf{Z}_\ell^*}$.

14. Avec la convention $\frac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}(x)=\chi_1(x)(1+\beta+\cdots+\beta^{v_\ell(x)})$ qui permet d'inclure le cas où $\beta-1$ n'est pas inversible.

• Si η est ramifié de conducteur ℓ^N, la seule de ces intégrales qui est non nulle est

$$\int_{\ell^{-N}\mathbf{Z}_\ell^*} \chi_2\chi_1^{-1}(x)\mathbf{e}_\ell(-x)\,dx = \beta^{-N}\sum_{x\in(\mathbf{Z}/\ell^N)^*}\eta(x)\mathbf{e}_\ell(-x/\ell^N) = \beta^{-N}\eta(-1)G(\eta)$$

Comme $\ell^{-N}\mathbf{Z}_\ell^* \subset \mathbf{Q}_\ell \smallsetminus \ell y\mathbf{Z}_\ell$, si et seulement $\mathbf{Z}_\ell^* \subset \mathbf{Q}_\ell \smallsetminus \ell^{N+1}y\mathbf{Z}_\ell$, et donc si et seulement si $v_\ell(y)+N+1\geq 1$, on a $\alpha = \beta^{-N}\eta(-1)G(\eta)G(\chi_2)^{-1}\mathbf{1}_{\ell^{-N}\mathbf{Z}_\ell}\chi_1$. Par ailleurs, $G(\eta)G(\chi_2)^{-1}G(\chi_1)\in\mathbf{Q}^*$ et est une unité de $\mathbf{Z}_p$; il s'ensuit que

$$\alpha = \alpha_0\mathbf{1}_{\ell^{-N}\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{\chi_1}{G(\chi_1)},\quad \text{où } \alpha_0 = \eta(-1)\tfrac{G(\chi_2\chi_1^{-1})G(\chi_1)}{G(\chi_2)}\beta^{-N}\in T^*.$$

On en déduit la seconde formule.

• Si $\chi_2\chi_1^{-1} = \mathrm{nr}_\beta$, alors

$$\int_{\ell^n\mathbf{Z}_\ell^*} = \begin{cases} 0 & \text{si } n\leq -2,\\ -\ell^{-1}\beta^{-1} & \text{si } n=-1,\\ (1-\frac{1}{\ell})\beta^n & \text{si } n\geq 0.\end{cases}$$

Si $v_\ell(y)=-1$, seul $n=-1$ contribue, tandis que si $v_\ell(y)\geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_1(y)\big(-\ell^{-1}\beta^{-1}+\sum_{n=0}^{v_\ell(y)}(1-\tfrac{1}{\ell})\beta^n\big) &= \chi_1(y)\big(-\ell^{-1}\beta^{-1}+(1-\tfrac{1}{\ell})\tfrac{1-\beta\chi_2\chi_1^{-1}(y)}{1-\beta}\big)\\ &= \tfrac{\ell\beta-1}{\ell\beta(1-\beta)}\chi_1(y) - \tfrac{(\ell-1)\beta^2}{\ell\beta(1-\beta)}\chi_2(y)\end{aligned}$$

D'où, en utilisant le fait que $\chi_1=\beta\chi_2$ sur $\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell$,

$$\mathscr{K}_{\phi_\infty} = \tfrac{\chi_2(-1)}{G(\chi_2)}\big(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\cdot\big(\tfrac{\ell\beta-1}{\ell\beta(1-\beta)}\chi_1 - \tfrac{(\ell-1)\beta^2}{\ell\beta(1-\beta)}\chi_2\big) - \tfrac{1}{\ell}\mathbf{1}_{\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell^*}\chi_2\big)$$

On en déduit la première formule en utilisant l'identité $\mathbf{1}_{\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell^*}+\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell} = \mathbf{1}_{\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell}$ et l'identité

$$(\ell\beta-1)\chi_1-(\ell-1)\beta^2\chi_2 = (\ell\beta-1)(\chi_1-\beta\chi_2)-\beta(1-\beta)\chi_2 \quad \square$$

Proposition 3.11. — (i) *Si* $\eta\neq 1$, *alors*

$$\mathscr{K}(\chi_1,\chi_2) = \widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*,T)\oplus T\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{\chi_1}{G(\chi_1)}\oplus T\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{\chi_2}{G(\chi_2)}$$

(ii) *Si* $\eta=1$ (et donc $G(\chi_1)=G(\chi_2)$), *alors*

$$\mathscr{K}(\chi_1,\chi_2) = \widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*,T)\oplus T\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{(\ell\beta-1)}{\beta-1}\big(\tfrac{\chi_1}{G(\chi_1)}-\beta\tfrac{\chi_2}{G(\chi_2)}\big)\oplus T\cdot\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{\chi_2}{G(\chi_2)}$$

Démonstration. — Le changement de variable $x=-yu$ nous donne

$$\mathscr{K}_{\bar\phi}(y) = \chi_1(-1)\tfrac{\chi_2(y)}{G(\chi_2)}\int_{\mathbf{Q}_\ell}\bar\phi(u)\mathbf{e}_\ell(yu)\,du$$

Comme la transformée de Fourier induit un isomorphisme de $\mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_\ell,T)$ sur $\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell,T)$, on en déduit que $\mathscr{K}(\chi_1,\chi_2)$ est la somme directe de $\frac{\chi_2}{G(\chi_2)}\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell,T)$ et de $T\cdot\mathscr{K}_{\phi_\infty}$. Comme la multiplication par $\frac{\chi_2}{G(\chi_2)}$ est bijective sur $\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*,T)$, le lemme 3.10 permet de conclure. $\square$

Remarque 3.12. — Si $\chi_2 = |\ |_\ell \chi_1$, et donc $\eta = 1$ et $\beta = \ell^{-1}$, le facteur $\ell\beta - 1$ s'annule, ce qui traduit le fait que le modèle de Kirillov n'est pas injectif (ce qui est rassurant car $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1 \otimes \chi_1)$ contient le caractère χ_1, et $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$ ne possède pas de sous-module de type fini stable par $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$).

3.4.5. Induites non ramifiées. — On suppose dans ce qui suit que $\ell \notin S$, et donc que χ_1 et χ_2 sont non ramifiés (et $G(\chi_1) = G(\chi_2) = 1$ et $\chi_1(-1) = \chi_2(-1) = 1$).

Lemme 3.13. — *$\alpha := \phi_\infty + \mathbf{1}_{\ell\mathbf{Z}_\ell}$ est invariante par $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell)$ et $\mathscr{K}_\alpha = \frac{\ell\beta-1}{\ell\beta}\,\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\frac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}$.*

Démonstration. — Soit $\alpha' := \mathbf{1}_{\ell\mathbf{Z}_\ell}$, et donc $\alpha = \phi_\infty + \alpha'$. Pour vérifier l'invariance sous l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell)$, il suffit de vérifier celle par $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour $b \in \mathbf{Z}_\ell$ et par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour $a \in \mathbf{Z}_\ell^*$. Pour cela, on utilise la formule du lemme 3.9. On a $w \cdot \phi_\infty = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}$ et $w \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell^*} = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell^*}$, et comme $\alpha = \phi_\infty + \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell} - \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell^*}$ on en déduit l'invariance par w; celle par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est immédiate (et ϕ_∞ et α' sont invariantes); pour celle par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, on réécrit $\alpha' + \phi_\infty$ sous la forme $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell} + \mathbf{1}_{\mathbf{Q}_\ell \smallsetminus \mathbf{Z}_\ell}\phi_\infty$, et les deux morceaux sont alors invariants.

La transformée de Fourier de α' est $\ell^{-1}\mathbf{1}_{\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell}$ et donc $\mathscr{K}_{\alpha'} = \ell^{-1}\mathbf{1}_{\ell^{-1}\mathbf{Z}_\ell}\chi_2$. Le résultat est alors une conséquence directe du lemme 3.10. □

Proposition 3.14. — *Si $\chi_2\chi_1^{-1} = \mathrm{nr}_\beta$, on peut prolonger* (de manière unique) *l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ sur $\mathscr{K}(\chi_1, \chi_2)$ à*

$$\Pi_\ell(\chi_1, \chi_2) := \widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, T) \oplus T \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\chi_2 \oplus T \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}$$

de telle sorte que l'action de $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$ soit induite par celle existant sur $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$ et $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\frac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}$ soit fixe par $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell)$.

Démonstration. — L'unicité est claire. Posons $v = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\frac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}$. Si $\ell\beta - 1$ n'est pas un diviseur de 0, l'action ci-dessus est induite par celle existant sur $\mathrm{Fr}(T) \otimes I(\chi_2, \chi_1)$; il suffit donc de vérifier qu'elle stabilise $\Pi_\ell(\chi_1, \chi_2)$ et il suffit de vérifier que c'est le cas pour les actions de w et de $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)$. Comme $\Pi_\ell(\chi_1, \chi_2) = \mathscr{K}(\chi_1, \chi_2) + T\,v$ la stabilité par w est claire puisque les deux morceaux sont stables. Comme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v - v$ est à support compact dans $\mathbf{Q}_\ell^*$, cela montre la stabilité par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_\ell \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme celle par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_\ell^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est claire, il ne reste que celle par $\left(\begin{smallmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ à vérifier; celle-ci suit de l'identité

$$\chi_1(\ell)\left(\begin{smallmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)v - v = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\chi_2$$

et de l'appartenance de $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\chi_2$ à $\mathscr{K}(\chi_1, \chi_2)$. Le cas où $\ell\beta - 1$ est un diviseur de 0 s'obtient par spécialisation (les formules pour l'action ci-dessus sont polynomiales en β). □

Remarque 3.15. — Si $\ell\beta - 1 = 0$ (i.e. $\chi_2 = |\ |_\ell\chi_1$), la représentation de G que l'on obtient est $\mathrm{Ind}_B^G(|\ |_\ell\chi_1 \otimes |\ |_\ell^{-1}\chi_1)$ alors que l'on est parti de $\mathrm{Ind}_B^G(\chi_1 \otimes \chi_1)$, la division par 0 ayant permis de faire passer le caractère $\chi_1 \circ \det$ de sous-objet à quotient.

3.4.6. Construction de $\Pi_\ell(\rho_T)$: le cas connexe. — Si $T[\frac{1}{p}]$ est connexe, la restriction de la semi-simplifiée $\rho_T^{\rm ss}$ de ρ_T au sous-groupe d'inertie est constante, et il y a trois possibilités :

• $\rho_T = \rho_0 \otimes_{\mathscr{O}_L} \chi$, où $\rho_0 : G_{\mathbf{Q}_\ell} \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ est absolument irréductible et $\chi : \mathbf{Q}_\ell^* \to T^*$ est un caractère localement constant, auquel cas $\Pi_\ell(\rho_T) := \chi \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi(\rho_0)$ et $\Pi(\rho_0)$ est un réseau d'une représentation supercuspidale dont le modèle de Kirillov est $\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \mathscr{O}_L)$.

• $\rho_T = \chi_1 \oplus \chi_2$ avec $\chi_2\chi_1^{-1}$ ramifié. Dans ce cas, on pose $\Pi_\ell(\rho_T) := I(\chi_2, \chi_1)$.

• $\rho_T^{\rm ns} = \chi_1 \oplus \chi_2$ avec $\chi_2\chi_1^{-1}$ non ramifié. Dans ce cas, on définit $\Pi_\ell(\rho_T^{\rm ns})$ comme la représentation $\Pi_\ell(\chi_1, \chi_2)$ de la prop. 3.14.

◇ Si $\rho_T \otimes \chi_1^{-1}$ est non ramifiée, on pose $\Pi_\ell(\rho_T) := \Pi_\ell(\rho_T^{\rm ss})$.

◇ Si $\rho_T \otimes \chi_1^{-1}$ est ramifiée, quitte à échanger χ_1 et χ_2, il existe des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{a}$ de T tels que $\kappa(\mathfrak{a}) \otimes (\rho_T \otimes \chi_1^{-1})$ soit une extension non triviale de 1 par $|\ |_\ell$. On doit avoir $\Pi(\rho_T) = \chi_1 \otimes \Pi(\rho_T \otimes \chi_1^{-1})$ et donc, quitte à tordre par χ_1^{-1}, on peut supposer que $\rho_T^{\rm ss} = 1 \oplus \chi$, avec χ non ramifié, et qu'il existe $\mathfrak{a}$ premier, minimal, tel que $\kappa(\mathfrak{a}) \otimes \rho_T$ soit une extension non triviale de 1 par $|\ |_\ell$.

Soit I_1 l'ensemble des ces $\mathfrak{a}$, et soit I_2 son complémentaire (ce sont des ensembles finis). Soit $T_i' = \prod_{\mathfrak{a} \in I_i} T/\mathfrak{a}$, si $i = 1, 2$. L'application naturelle $T \to T_1' \times T_2'$ est injective ; on note $\mathfrak{b}_1$ l'image inverse de $\{0\} \times T_2'$ et $\mathfrak{b}_2$ celle de $T_1' \times \{0\}$ et $T_i = T/\mathfrak{b}_i$, si $i = 1, 2$. L'application naturelle $T \to T_1 \times T_2$ est encore injective, et ρ_{T_2} est non ramifiée alors que, pour tout idéal minimal $\mathfrak{a}$ de T_1, $\kappa(\mathfrak{a}) \otimes \rho_T$ est une extension non triviale de 1 par $|\ |_\ell$.

On a une suite exacte $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariante

$$0 \to T_1 \otimes \mathrm{St} \to \Pi_\ell(\rho_{T_1}^{\rm ss}) \to T_1 \to 0$$

et une surjection $\Pi_\ell(\rho_T^{\rm ss}) \to \Pi_\ell(\rho_{T_1}^{\rm ss})$ (induite par la surjection $T \to T_1$). On définit $\Pi_\ell(\rho_T)$ comme le noyau de la flèche composée $\Pi_\ell(\rho_T^{\rm ss}) \to T_1$; on a une suite exacte $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$-équivariante

$$0 \to \Pi_\ell(\rho_T) \to \Pi_\ell(\rho_T^{\rm ss}) \to T_1 \to 0 \tag{3.16}$$

Remarque 3.17. — (i) Au niveau des modèles de Kirillov on a, dans les notations de la prop. 3.14, un isomorphisme de T-modules

$$\Pi_\ell(\rho_T) \cong \widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, T) \oplus T \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\chi_2 \oplus \mathfrak{b}_2 \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\tfrac{\chi_1 - \beta\chi_2}{1-\beta}$$

(le $\mathfrak{b}_2$ apparaît comme noyau de $T \to T_1$) ; en particulier, $\Pi_\ell(\rho_T)$ n'est pas nécessairement libre sur T (mais pas loin).

(ii) En appliquant $M \mapsto T_2 \otimes_T M$ à la suite exacte (3.16), on obtient une suite exacte $T_2 \otimes_T \Pi_\ell(\rho_T) \to \Pi_\ell(\rho_{T_2}) \to T/(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) \to 0$. En particulier, la flèche naturelle $\Pi_\ell(\rho_T) \to \Pi_\ell(\rho_{T_2})$ n'est pas nécessairement surjective bien que $\rho_T \to \rho_{T_2}$ le soit.

Remarque 3.18. — Dans tous les cas, $\Pi_\ell(\rho_T)$ contient $\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$ et le quotient $J_\ell(\rho_T)$ est un T-module sans torsion engendré par au plus deux éléments, et libre sauf dans le dernier cas.

3.4.7. Construction de $\Pi_\ell(\rho_T)$: le cas général. — Si $T \hookrightarrow \prod_i T_i$ où les $T_i[\frac{1}{p}]$ sont connexes comme dans la rem. 3.1, on définit $\Pi_\ell(\rho_T)$ par

$$\Pi_\ell(\rho_T) = \big(\prod_i \Pi_\ell(\rho_{T_i})\big) \cap \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), T)$$

l'intersection étant prise dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), \prod_i T_i)$.

Si p^N tue $(\prod_i T_i)/T$, alors p^N tue $\big(\prod_i \Pi_\ell(\rho_{T_i})\big)/\Pi_\ell(\rho_T)$. En particulier, dans le modèle de Kirillov, $\Pi_\ell(\rho_T)$ contient $p^N\widetilde{\mathrm{LC}}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$.

Remarque 3.19. — On déduit de la classification **[66]** des représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ modulo p que $k_L \otimes_{T_i} \Pi_\ell(\rho_{T_i})$ a une et une seule composante de Jordan-Hölder de dimension infinie qui n'est autre, pour tout i, que $\Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho_T})$.

Proposition 3.20. — *Si $\mathfrak{p}$ est un point de $\mathscr{X}$, alors*

$$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_T \Pi_\ell(\rho_T) \cong \begin{cases} \Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) & \textit{si } \mathfrak{p} \textit{ n'est pas } \ell\textit{-problématique,} \\ \Pi_\ell^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) & \textit{si } \mathfrak{p} \textit{ est } \ell\textit{-problématique.} \end{cases}$$

Démonstration. — Comme l'énoncé est rationnel, on peut supposer que $T[\frac{1}{p}]$ est connexe, et alors le résultat est immédiat sur la construction. □

3.4.8. Comparaison avec la théorie d'Emerton et Helm. — Notons $\Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)$ le p-saturé de l'image de $\check{T} \otimes_T \Pi_\ell(\rho_T)$ dans $\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), \check{T})$. Donc $\Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)$ est de T-torsion (la T-torsion est dense dans $\check{T}$).

Exemple 3.21. — Si $T = \mathscr{O}_L$, alors $\Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)$ est l'unique (à homothétie près) $\mathscr{O}_L$-réseau de $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(L \otimes_{\mathscr{O}_L} \rho_T)$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}_L$ a un socle générique (que $\Pi_\ell(\rho_T)$ vérifie cette condition est un cas particulier du (i) du th. 3.23 ci-dessous).

Remarque 3.22. — (i) Si on remplace $\Pi_\ell(\rho_T)$ par un sous-réseau dans la définition de $\Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)$, on obtient le même résultat puisqu'on p-sature. Cela permet de se ramener au cas connexe pour beaucoup d'arguments : si $T \hookrightarrow \prod_i T_i$ comme dans la rem. 3.1, on peut remplacer $\Pi_\ell(\rho_T)$ par $\oplus_i p^N \Pi_\ell(\rho_{T_i})$.

(ii) Si $\mathfrak{n}$ est un idéal de T (un tel idéal est automatiquement fermé, et $\mathfrak{n}[\frac{1}{p}]$ est fermé dans $T[\frac{1}{p}]$) et si $T_\mathfrak{n} := T/\mathfrak{n}$ est sans p-torsion, alors $\check{T}[\mathfrak{n}] = \check{T}_\mathfrak{n}$. Il s'ensuit que

$$\Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)[\mathfrak{n}] = \Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T) \cap \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), \check{T}_\mathfrak{n})$$

Théorème 3.23. — (i) *Le socle de $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)$ est irréductible, de dimension infinie sur k_L.*

(ii) *Si $\mathfrak{p}$ est un point de $\mathscr{X}$, alors $\Pi_\ell^{\mathrm{EH}}(\rho_T)[\mathfrak{p}]$ est le réseau $\Pi_e ll^{\mathrm{EH}}(\rho_{T/\mathfrak{p}})$ de $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ sauf si $\mathfrak{p}$ est ℓ-pathologique où c'est un réseau de $\Pi_\ell^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$.*

Démonstration. — Par construction,

$$k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T) \hookrightarrow \widetilde{\rm LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \check{T})$$

Son socle **soc** est tué par $\mathfrak{m}_T$ car $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \check{T}$ est de $\mathfrak{m}_T^\infty$-torsion, et comme $(k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \check{T})[\mathfrak{m}_T] = (T/\mathfrak{m}_T)^\vee = k_L$, ce socle s'injecte dans $\widetilde{\rm LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), k_L)$; en particulier, il est constitué de représentations génériques. Maintenant, les composantes de Jordan-Hölder de $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)$ sont parmi celles des $k_L \otimes_{T_i} \Pi_\ell(\rho_{T_i})$ et on a donc $\mathbf{soc} \cong \Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho}_T)^{\oplus r}$ pour un certain $r \geq 1$ (cf. rem. 3.19). Mais le théorème de multiplicité 1 affirme que $\Pi_\ell^{\min}(\overline{\rho}_T)$ est de multiplicité ≤ 1 dans $\widetilde{\rm LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell), k_L)$. On a donc $r = 1$, ce qui prouve le (i).

Pour prouver le (ii), on peut supposer que $T[\frac{1}{p}]$ est connexe, et alors le résultat est clair sur la description de $\Pi_\ell(\rho_T)$, sauf dans le dernier cas ($\rho_T^{\rm ss} \otimes \chi_1^{-1}$ non ramifié et $\rho_T \otimes \chi_1^{-1}$ ramifiée) dont nous reprenons les notations.

Commençons par prouver que $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)[\mathfrak{b}_1] = \Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_{T_2})$. Il résulte du (i) de la rem. 3.17 et du (ii) de la rem. 3.22 que $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)[\mathfrak{b}_1]$ contient comme sous-T_2-module

$$\widetilde{\rm LC}_c(\mathbf{Q}_\ell^*, \check{T}_2) \oplus \check{T}_2 \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\chi_2 \oplus \mathfrak{b}_2\check{T} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell} \tfrac{\chi_1 - \beta\chi_2}{1-\beta}$$

Or $\mathfrak{b}_2\check{T}$ contient un réseau de $\check{T}_2$ d'après le lemme 3.24 ci-dessous. On en déduit que $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)[\mathfrak{b}_1]$ contient un réseau de $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_{T_2})$ et donc lui est égal par p-saturation.

On en déduit le résultat pour tous les $\mathfrak{p}$ appartenant à $\operatorname{Spec} T_2$ (vu comme sous-espace de $\operatorname{Spec} T$). Si $\mathfrak{p}$ appartient au complémentaire (qui est inclus dans $\operatorname{Spec} T_1$), on a $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)[\mathfrak{p}] = \chi_1 \otimes {\rm St}$ qui n'est un réseau de $\Pi_\ell^{\rm cl}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ que si $\rho_{\kappa(\mathfrak{p})} \otimes \chi_1^{-1}$ est ramifiée, i.e. si $\mathfrak{p}$ n'est pas ℓ-pathologique.

Ceci permet de conclure. □

Lemme 3.24. — *Soit $\mathfrak{n} \neq 0$ un idéal de T. Soit $A(\mathfrak{n})$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{n}$ soit inclus dans l'idéal annulateur de la composante irréductible $\mathscr{X}_\mathfrak{a}$ de $\mathscr{X}$ définie par $\mathfrak{a}$, et soient $\mathfrak{n}'$ l'idéal annulateur de $\cup_{\mathfrak{a} \notin A(\mathfrak{n})} \mathscr{X}_\mathfrak{a}$ et $T' = T/\mathfrak{n}'$. Alors il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $p^c\check{T}' \subset \mathfrak{n} \cdot \check{T} \subset \check{T}'$.*

Démonstration. — On a $\mathfrak{n}\mathfrak{n}' = 0$ et donc $\mathfrak{n} \cdot \check{T} \subset \check{T}[\mathfrak{n}'] = \check{T}'$, ce qui prouve l'une des inclusions.

Si $\alpha \in T'$, alors $\alpha T'[\frac{1}{p}]$ est fermé dans $T'[\frac{1}{p}]$ et donc ${\rm Hom}(T'[\frac{1}{p}], L) \to {\rm Hom}(\alpha T'[\frac{1}{p}], L)$ est surjective. Maintenant, par construction, $\mathfrak{n}$, vu comme idéal de T' contient des éléments qui ne sont pas des diviseurs de 0. Choisissons un tel α.

Si $\mu \in {\rm Hom}(T'[\frac{1}{p}], L)$, on définit λ sur $\alpha T'[\frac{1}{T}]$ par $\lambda(x) = \mu(\frac{x}{\alpha})$ ce qui est possible car $x \mapsto \alpha x$ est une bijection de $T'[\frac{1}{p}]$ sur $\alpha T'[\frac{1}{T}]$ grâce à la condition mise sur α. On peut alors relever λ en $\lambda' \in {\rm Hom}(T'[\frac{1}{p}], L)$, et on a $\alpha\lambda' = \mu$, i.e. la multiplication par α est surjective sur ${\rm Hom}(T'[\frac{1}{p}], L) = \check{T}'[\frac{1}{p}]$. Le théorème de l'image ouverte permet d'en déduire que $\alpha\check{T}' \supset p^c\check{T}'$ avec $c \in \mathbf{N}$; a fortiori $\mathfrak{n} \cdot \check{T}' \supset p^c\check{T}'$. □

Remarque 3.25. — On déduit du th. 3.23 que $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)$ est le module considéré par Emerton et Helm ([**27**, th. 4.4.1], [**28**]), ou son $\mathscr{O}_L$-dual lisse [**39**] si on préfère le point de vue co-whittaker.

3.4.9. Foncteur de Kirillov et nouveau vecteur. — Rappelons que $L\otimes\Pi_\ell(\rho_T)$ contient $\widetilde{\rm LC}(\mathbf{Q}_\ell^*, T)$ (si $T[\frac{1}{p}]$ est connexe, c'est déjà le cas de $\Pi_\ell(\rho_T)$). On note $v'_{T,\ell}$ la fonction

$$v'_{T,\ell} = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell^*} \in L\otimes\Pi_\ell(\rho_T);$$

c'est un générateur du *foncteur de Kirillov* [**27**, § 4.1] de $L\otimes\Pi_\ell(\rho_T)$, i.e. le $T[\frac{1}{p}]$-module

$$\big\{v\in L\otimes\Pi_\ell(\rho_T),\ \big(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_\ell^* & \mathbf{Z}_\ell\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot v = v,\ \textstyle\sum_{i=0}^{\ell-1}\big(\begin{smallmatrix}\ell & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell\cdot v = 0\big\}.$$

(Si $v'_{T,\ell}\in\Pi_\ell(\rho_T)$, c'est un générateur du foncteur de Kirillov de $\Pi_\ell(\rho_T)$.)

Remarque 3.26. — A priori, l'image de $\check T\otimes_T v'_{T,\ell}$ est seulement incluse dans $L\otimes_{\mathscr{O}_L}\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)$. Mais, si $\mathfrak{p}$ est un point non ℓ-pathologique de $\mathscr{X}$, l'image de la $\mathfrak{p}$-torsion est incluse dans $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)[\mathfrak{p}] = \Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_{T/\mathfrak{p}})$ car $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}$ appartient à son modèle de Kirillov. Comme le $\mathscr{O}_L$-module engendré par les $\check T[\mathfrak{p}]$ est dense dans $\check T$, on en déduit que l'image de $\check T\otimes_T v'_{T,\ell}$ est incluse dans $\Pi_\ell^{\rm EH}(\rho_T)$.

Si $\ell\notin S$, notons $v_{T,\ell}\in\Pi_\ell(\rho_T)$ la fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\frac{\chi_1-\beta\chi_2}{1-\beta}$ de la prop. 3.14. De manière explicite, on a

$$v_{T,\ell}(x) = \begin{cases}0 & \text{si } x\notin\mathbf{Z}_\ell,\\ \chi_1(\ell)^n+\chi_1(\ell)^{n-1}\chi_2(\ell)+\cdots+\chi_2(\ell)^n & \text{si } x\in\ell^n\mathbf{Z}_\ell^* \text{ et } n\geq 0.\end{cases}$$

C'est *le nouveau vecteur normalisé* (par la condition $v_{T,\ell}(1)=1$) de $\Pi_\ell(\rho_T)$; il engendre $\Pi_\ell(\rho_T)$ en tant que $T[\mathbb{P}(\mathbf{Q}_\ell)]$-module.

Un petit calcul fournit la relation

$$\big(1-(\chi_1(\ell)+\chi_2(\ell))\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell + (\chi_1(\ell)\chi_2(\ell))\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-2} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)\star v_{T,\ell} = v'_{T,\ell} \tag{3.27}$$

Remarque 3.28. — Si $T=\mathscr{O}_L$, la représentation $\Pi_\ell(\rho_T)$ possède un nouveau vecteur normalisé $v_{T,\ell}$ pour tout $\ell\neq p$. Il existe $P_\ell\in 1+X\mathscr{O}_L[X]$, unique, tel que

$$P_\ell\big(\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)\star v_{T,\ell} = v'_{T,\ell}.$$

De plus, $\deg P_\ell\leq 2$, et $P_\ell=1$ si $\Pi_\ell(\rho_T)$ est supercuspidale. La relation (3.27) se traduit, si $\ell\notin S$, par la formule

$$P_\ell = 1-(\chi_1(\ell)+\chi_2(\ell))X+(\chi_1(\ell)\chi_2(\ell))X^2.$$

Dans tous les cas, $P_\ell(\ell^{-s})^{-1}$ est le facteur d'Euler en ℓ de la fonction L associée à ρ_T, i.e. $P_\ell(X)=\det((1-X\sigma_\ell^{-1})_{|\rho_T^{I_\ell}})$.

3.5. Torsion par un caractère

Si F est un sous-corps de $\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}$, alors

$$H := \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$$

est un quotient de $G_{\mathbf{Q}}$ et même de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbf{Q}) = \widehat{\mathbf{Z}}^*$ (l'identification se faisant via le caractère cyclotomique). Comme la flèche naturelle $\widehat{\mathbf{Z}}^* \to \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*\mathbf{R}_+^*$ est un isomorphisme, H est aussi, naturellement, un quotient de $\mathbf{A}^*$. On note

$$\gamma \mapsto \overline{\gamma} \quad \text{et} \quad a \mapsto \overline{a}$$

les morphismes $G_{\mathbf{Q}} \to H$ et $\mathbf{A}^* \to H$ ci-dessus.

On peut voir l'algèbre de groupe complétée $\mathbf{Z}_p[[H]]$ aussi comme l'algèbre des mesures sur H, à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. Si $h \in H$, on note $[h]$ la masse de Dirac en h (i.e. l'élément h vu comme élément de l'algèbre de groupe). On munit $\mathbf{Z}_p[[H]]$ d'actions $\mathbf{Z}_p[[H]]$-linéaires de $G_{\mathbf{Q}}$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ en posant :

$$\gamma \cdot \lambda = [\overline{\gamma}]\,\lambda \quad \text{et} \quad g \star \lambda = [\overline{\det g}^{-1}]\,\lambda, \quad \text{si } \gamma \in G_{\mathbf{Q}} \text{ et } g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}). \tag{3.29}$$

Par dualité, $\mathscr{C}(H, \mathbf{Z}_p)$ est aussi muni d'actions $\mathbf{Z}_p[[H]]$-linéaires de $G_{\mathbf{Q}}$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$.

Soit $\mathscr{W}_F = \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}_p[[H]]$. Si $[L : \mathbf{Q}_p] < \infty$, alors $\mathscr{W}_F(\mathscr{O}_L)$ est l'ensemble des caractères continus $\eta : H \to \mathscr{O}_L^*$.

Soit maintenant T une algèbre locale comme ci-dessus. On suppose que H est fini ou isomorphe au produit de $\mathbf{Z}_p$ par un groupe fini. Alors

$$T[[H]] := \mathbf{Z}_p[[H]]\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} T$$

est une algèbre semi-locale. Si $\mathscr{X}_T = \mathrm{Spec}\,T$ et $\mathscr{X}_{T[[H]]} = \mathrm{Spec}\,T[[H]]$ et si $[L : \mathbf{Q}_p] < \infty$, alors $\mathscr{X}_{T[[H]]}(\mathscr{O}_L) = \mathscr{X}_T(\mathscr{O}_L) \times \mathscr{W}_F(\mathscr{O}_L)$.

Si $\rho_T : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(T)$ est une T-représentation de $G_{\mathbf{Q}}$, on note $\rho_{T[[H]]}$ la $T[[H]]$-représentation

$$\rho_{T[[H]]} := \mathbf{Z}_p[[H]]\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \rho_T,$$

où $G_{\mathbf{Q}}$ agit diagonalement. Si $x \in \mathscr{X}_T(\mathscr{O}_L)$, on note ρ_x la représentation

$$\rho_x := (T/\mathfrak{p}_x) \otimes_T \rho_T,$$

où $\mathfrak{p}_x$ est l'idéal de T correspondant à x. La représentation associée à $(x, \eta) \in \mathscr{X}_T(\mathscr{O}_L) \times \mathscr{W}_F(\mathscr{O}_L) = \mathscr{X}_{T[[H]]}(\mathscr{O}_L)$ est la tordue $\rho_x \otimes \tilde{\eta}$ de ρ_x par le caractère $\tilde{\eta}$ de $G_{\mathbf{Q}}$ défini par $\tilde{\eta}(\gamma) = \eta(\overline{\gamma})$. En d'autres termes, la représentation ρ_T interpole analytiquement les ρ_x, pour $x \in \mathscr{X}_T(L)$ et $\rho_{T[[H]]}$ interpole analytiquement les tordues des ρ_x, pour $x \in \mathscr{X}_T(L)$, par les caractères continus de H.

La compatibilité des correspondances de Langlands locales avec la torsion par un caractère fournit des identifications de $T[[H]]$-modules :

$$\Pi_p^*(\rho_{T[[H]]}) = \mathbf{Z}_p[[H]]\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\Pi_p^*(\rho_T) \quad \text{et} \quad \Pi_p(\rho_{T[[H]]}) = \mathscr{C}(H, \mathbf{Z}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\Pi_p(\rho_T)$$
$$\Pi_\ell(\rho_{T[[H]]}) = \mathbf{Z}_p[[H]] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Pi_\ell(\rho_T), \text{ si } \ell \neq p,$$

et ces identifications commutent aux actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ en faisant agir $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ diagonalement sur les membres de droite.

3.6. Globalisation

Rappelons que ρ_T est non ramifiée hors de S.

3.6.1. La représentation $\Pi(\rho_T)$ *de* $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$. — Posons

$$\Pi^{]p[}(\rho_T) := \Pi_{S\setminus\{p\}}(\rho_T) \otimes_T \Pi^{]S[}(\rho_T),$$

$$\Pi_{S\setminus\{p\}}(\rho_T) := \big(\otimes_{\ell\in S\setminus\{p\}} \Pi_\ell(\rho_T)\big)/T\text{-torsion}, \quad \Pi^{]S[}(\rho_T) := \otimes_{\ell\notin S}(\Pi_\ell(\rho_T), v_{T,\ell})$$

où les produits tensoriels de la seconde ligne sont au-dessus de T et $\otimes_{\ell\notin S}(\Pi_\ell(\rho_T), v_{T,\ell})$ est le produit tensoriel restreint des $\Pi_\ell(\rho_T)$ relativement aux $v_{T,\ell}$; en ce qui concerne $\Pi_{S\setminus\{p\}}(\rho_T)$, comme les $\Pi_\ell(\rho_T)$, pour $\ell \in S \setminus \{p\}$, ne sont pas forcément libres, le produit tensoriel peut introduire de la T-torsion.

En faisant le produit tensoriel [15] des modèles de Kirillov locaux, on fabrique un modèle de Kirillov $T[\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty,p[})]$-équivariant :

$$\mathscr{K}^{]p[} : \Pi^{]p[}(\rho_T) \to \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{A}^{]\infty,p[,*}, T)$$

Comme on a quotienté par la T-torsion en faisant le produit tensoriel, ce modèle est injectif (c'est la raison principale pour quotienter par la torsion).

On a une injection $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante $\iota_p : \Pi_p(\rho_T) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H$. Soit

$$\iota := \mathscr{K}^{]p[} \otimes \iota_p : \Pi^{]p[}(\rho_T) \otimes_T \Pi_p(\rho_T) \to \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{A}^{]\infty,p[,*}, (\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H)$$

et soit $\Pi(\rho_T)_{\rm ns}$ (le "ns" en indice signifie "non saturé") l'image de ι. On peut prolonger l'injection $T[\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-équivariante $\Pi(\rho_T)_{\rm ns} \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{A}^{]\infty,p[,*}, (\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H)$ en une injection $T[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-équivariante $\iota^{\mathbb{G}}$ dans l'induite à $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, i.e. le modèle de Whittaker

$$\widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty,p[}), (\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H) := \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})} \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbf{A}^{]\infty,p[,*}, (\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H)$$

Soit $\Pi(\rho_T)$ le saturé de $\Pi(\rho_T)_{\rm ns}$ dans cette induite ; i.e.

$$\Pi(\rho_T) := \iota^{\mathbb{G}}\big(\Pi(\rho_T)_{\rm ns}[\tfrac{1}{p}]\big) \cap \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty,p[}), (\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H) \tag{3.30}$$

On munit $\Pi(\rho_T)$ de la topologie induite par celle de $\widetilde{\mathbf{A}}^-\widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit}$ (i.e. la topologie sur l'induite est obtenue par limite inductive). Le (i) du th. 3.32 ci-dessous montre que la topologie induite sur $\Pi(\rho_T)_{\rm ns}$ est la topologie initiale.

Remarque 3.31. — On peut définir de la même manière $\Pi_S(\rho_T)_{\rm ns}$ et $\Pi_S(\rho_T)$, et on a

$$\Pi(\rho_T) = \Pi_S(\rho_T) \otimes_T \Pi^{]S[}(\rho_T), \quad \Pi(\rho_T)_{\rm ns} = \Pi_S(\rho_T)_{\rm ns} \otimes_T \Pi^{]S[}(\rho_T)$$

(et $\Pi^{]S[}(\rho_T)$ est un T-module libre).

15. En fait de produit tensoriel, c'est plutôt un produit extérieur : $(\boxtimes_\ell\phi_\ell)((x_\ell)_\ell) := \prod_\ell \phi_\ell(x_\ell)$.

Théorème 3.32. — (i) *Il existe* $c \in \mathbf{N}$ *tel que* $\Pi(\rho_T)_{\rm ns} \subset \Pi(\rho_T) \subset p^{-c}\Pi(\rho_T)_{\rm ns}$.

(ii) *On a*

$$(k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi(\rho_T))[\mathfrak{m}_T] = \big((k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_S(\rho_T))[\mathfrak{m}_T]\big) \otimes_{k_L} \big(\Pi^{]S[}(\rho_T)/\mathfrak{m}_T\big)$$

De plus, $(k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_S(\rho_T))[\mathfrak{m}_T]$ *est générique, et contient* $\otimes_{\ell\in S}\Pi_\ell^{\rm min}(\overline{\rho}_T)$*, le quotient étant non générique, et* $\Pi^{]S[}(\rho_T)/\mathfrak{m}_T \cong \otimes'_{\ell\notin S}\Pi_\ell^{\rm nr}(\overline{\rho}_T)$.

Démonstration. — Pour prouver le (i), la rem. 3.31 permet de remplacer $\Pi(\rho_T)$ par $\Pi_S(\rho_T)$.

On a $\Pi_S(\rho_T)_{\rm ns} \subset \Pi_S(\rho_T)$ par construction. Pour prouver l'existence de c, on se ramène au cas où $T[\frac{1}{p}]$ est connexe (si $T \hookrightarrow \prod_i T_i$ comme dans la rem. 3.1, avec $(\prod_i T_i)/T$ tué par p^{c_1}, la formule (3.30) permet de montrer que $\prod_i \Pi(\rho_{T_i})/\Pi(T)$ est tué par p^{c_1}).

On identifie $\Pi_S(\rho_T)_{\rm ns}$ à son modèle de Kirillov, i.e. on fait tous les calculs dans $\widetilde{\rm LC}(\mathbf{Q}_p^*, (\widetilde{\mathbf{A}}^- \widehat{\otimes}\rho_T^{\clubsuit})^H)$. Soit $x = \sum_i x_i^{]p[} \otimes x_{i,p} \in \Pi_S(\rho_T)_{\rm ns}$, non divisible par p. On doit exhiber c, ne dépendant pas de x, tel que $\iota(x)$ ne soit pas divisible par p^c.

Soit $S' := S \smallsetminus \{p\}$ et soit $T' := \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty},\, \ell \in S'] \otimes T$; il suffit de prouver le résultat après extension des scalaires à T' ce qui permet de s'affranchir de la condition d'invariance par $\mathbf{Z}_{S'}^*$. Le sous-T'-module engendré par les $x_i^{]p[}$ est de rang fini, et il est donc inclus dans un module du type $\oplus_i \mathfrak{n}_i \cdot e_i$, où $\mathfrak{n}_i$ est un idéal de T' (produit de $\mathfrak{b}_{i,\ell}$, où les $\mathfrak{b}_{i,\ell}$ sont du type de ceux apparaissant dans la rem. 3.17 ; en particulier, $\mathfrak{n}_i$ varie dans un ensemble fini puisque S est fini et les $\mathfrak{b}_{i,\ell}$ varient dans un ensemble fini), et où e_i est de la forme $\otimes_{\ell\in S'} e_{i,\ell}$ et $e_{i,\ell}$ est d'une des formes suivantes :

- $\mathbf{1}_{a(1+\ell^{n_\ell}\mathbf{Z}_\ell)}$, avec $n_\ell > 0$ ne dépendant que de ℓ, et $a \in \mathbf{Q}_\ell^*/(1+p^{n_\ell}\mathbf{Z}_\ell)$.
- $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}(\chi_{\ell,1} - \chi_{\ell,2})$ ou $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}(\chi_{\ell,2}(a)\chi_{\ell,1} - \chi_{\ell,1}(a)\chi_{\ell,2})$ pour $a \in \mathbf{Z}_\ell^*$ minimisant $v_p(\chi_{\ell,1}(x) - \chi_{\ell,2}(x))$ (si $(\rho_{T,\ell})^{\rm ss} = \chi_{\ell,1} \oplus \chi_{\ell,2}$ et $\chi_{\ell,1} \neq \chi_{\ell,2}$ sur $\mathbf{Z}_\ell^*$). On a alors $v_p(\chi_{\ell,1}(a) - \chi_{\ell,2}(a)) = 0$ sauf si ${\chi_{\ell,1}}^{-1}\chi_{\ell,2}$ est d'ordre p^k, où l'on obtient $v_(\zeta_{p^k} - 1)$.
- $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell}\chi_1$ ou $v_{T,\ell}$ (si $\chi_{\ell,1} = \chi_{\ell,2}$ sur $\mathbf{Z}_\ell^*$).

Il existe alors une collection de $z_i \in \mathbf{Q}_{S'}^*$ tels que $e_i(z_j) = 0$ si $j \neq i$, et $e_i(z_i)$ est une unité de T' sauf pour les fonctions du second point (où il faut évaluer en $\ell^{n!}$ et $a\ell^{n!}$ pour n assez grand – la limite est de la forme $\zeta - 1$, où $\zeta \neq 1$ est une racine de l'unité) et $v_{T,\ell}$ du troisième (où il faut évaluer en $\ell^{n!} - 1$ pour n assez grand – la limite est 1).

Cette quasi-orthogonalité permet de supposer que $x = e^{]p[} \otimes x_p$, où $e^{]p[}$ est une des fonctions ci-dessus et $x_p \in \mathfrak{n}\Pi_p(\rho_T)$ n'est pas divisible par p dans $\mathfrak{n}\Pi_p(\rho_T)$, avec $\mathfrak{n}$ un des $\mathfrak{n}_i$ ci-dessus. Mais alors x_p n'est pas divisible par p dans $\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \mathfrak{n}\rho_T^{\clubsuit}$, et il existe $c(\mathfrak{n})$ tel que x_p ne soit pas divisible par $p^{c(\mathfrak{n})}\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \rho_T^{\clubsuit}$ d'après le lemme 3.24 (car $\rho_T^{\clubsuit} \cong \check{T} \oplus \check{T}$ en tant que T-module). Si $c' = \sup_{\mathfrak{n}} c(\mathfrak{n})$, il s'ensuit que $\iota(x)$ n'est pas divisible par $p^{|S|+c'}$ (car $v_p(\zeta - 1) \leq 1$, si $\zeta \neq 1$ est une racine de l'unité, et il y a au plus $|S'|$ termes de cette forme, provenant de fonctions du second point, pour

$\ell \in S'$). Si $c = c' + |S'|$, alors x n'est pas divisible par p^c dans le modèle de Kirillov, et donc aussi, a fortiori, dans le modèle de Whittaker. Cela prouve le (i).

Passons à la preuve du (ii). La factorisation résulte de la rem. 3.31, et le reste de l'énoncé se démontre en adaptant la preuve du (i) du th. 3.23, les points clés étant que $k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi_S(\rho_T) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{LC}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), \widetilde{\mathbf{A}}^- \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \rho_T^{\clubsuit})$ et que $\rho_T^{\clubsuit} \cong \check{T} \oplus \check{T}$. □

3.6.2. Spécialisation. — Soit $\overline{S}$ l'ensemble des nombres premiers en lesquels $\overline{\rho}_T$ est ramifiée (en incluant p). Si $\overline{S} \subset \Sigma \subset S$, notons $T(\Sigma)$ le plus grand quotient de T tel que $\rho_{T(\Sigma)}$ soit non ramifiée en dehors de Σ, et soit $\mathscr{X}_\Sigma := \operatorname{Spec} T(\Sigma)$; c'est un fermé de $\mathscr{X}$ (qui n'est autre que $\mathscr{X}_S$).

On dit que ρ_T est *équilibrée* si $\mathscr{X}_\Sigma$ est une réunion de composantes irréductibles de $\mathscr{X}$ pour tout $\overline{S} \subset \Sigma \subset S$. Si ρ_T est équilibrée, les points de $\mathscr{X}$ ne sont ℓ-pathologiques pour aucun $\ell \neq p$.

Exemple 3.33. — Si la restriction de $\overline{\rho}_T$ à $G_{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)}$ est irréductible, et si la restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & \varepsilon_p \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \otimes \delta$, alors la déformation universelle de $\overline{\rho}_T$ non ramifiée en dehors de S est équilibrée (il ressort des travaux de Böckle [**6**], Diamond-Flach-Guo [**21**] et Fouquet-Wan [**33**], que, dans ce cas, les $\mathscr{X}_\Sigma$ sont purement de dimension relative 3 sur $\mathbf{Z}_p$).

Si $\mathfrak{p}$ est un point de $\mathscr{X}$, on définit $\Pi(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ et $\Pi^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ comme les produits tensoriels restreints (au-dessus de $\kappa(\mathfrak{p})$) :

$$\begin{aligned} \Pi(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) &:= \Pi_p(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) \otimes \big(\otimes'_{\ell \neq p} \Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) \big) \\ \Pi^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) &:= \big(\otimes_{\ell \in S} \Pi_\ell^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) \big) \otimes \big(\otimes'_{\ell \notin S} \Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) \big) \end{aligned}$$

Notons que le quotient $\Pi(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})/\Pi^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ est petit (i.e. non générique).

Théorème 3.34. — *Soit $\mathfrak{p}$ un point de $\mathscr{X}$.*

(i) *On a des injections* $\Pi^{\min}(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}) \hookrightarrow \Pi(\rho_T)[\mathfrak{p}] \hookrightarrow \Pi(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$.

(ii) *Si ρ_T est équilibrée, on a un isomorphisme* $\Pi(\rho_T)[\mathfrak{p}] \xrightarrow{\sim} \Pi(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ *sauf, peut-être, si $\mathfrak{p}$ est p-pathologique.*

Démonstration. — Le (i) résulte de ce que $\Pi(\rho_T)[\mathfrak{p}] = (\Pi^{]p[}(\rho_T)/\mathfrak{p}) \otimes \Pi_p(\rho_T)[\mathfrak{p}]$ et $\Pi_p(\rho_T)[\mathfrak{p}] = \Pi_p(\rho_{\kappa(\mathfrak{p})})$ (sauf dans le cas p-pathologique où on a juste une inclusion), et de la prop. 3.20.

Le (ii) se démontre par les mêmes techniques que le (ii) du th. 3.23, en utilisant le fait que $\Pi_p(\rho_T)$ se comporte comme $\check{T}$: ces techniques fournissent une injection de $\Pi(\rho_{T(\Sigma)})$ dans $\Pi(\rho_T)$, pour tout Σ ; on choisit alors Σ égal à l'ensemble des ℓ en lesquels $\rho_{\kappa(\mathfrak{p})}$ est ramifiée. □

Conjecture 3.35. — *Si $\overline{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(k)$ est irréductible, non ramifiée en dehors de S, et si T est l'anneau des déformations universelles de $\overline{\rho}$ non ramifiées en dehors* *de S et $\rho_T : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathbf{GL}_2(T)$ est la déformation universelle, on a un isomorphisme de $k_L[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-modules*

$$(k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} \Pi(\rho_T))[\mathfrak{m}_T] \cong \big(\otimes_{\ell\in S} \Pi_\ell(\overline{\rho})\big) \otimes \big(\otimes'_{\ell\notin S} \Pi_\ell^{\rm nr}(\overline{\rho})\big)$$

3.6.3. Le modèle de Kirillov de $\rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond)$. — On va s'intéresser à la représentation $\rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond)$; en particulier, cela demande de remplacer ρ_T par $\rho_T^\diamond$ dans les énoncés précédents et $\rho_T^\clubsuit$ par $(\rho_T^\diamond)^\clubsuit = \rho_T^*$.

Fixons un plongement $\mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}^{]p[}] \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$ et donc aussi un plongement dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. En faisant le produit tensoriel de $\mathscr{K}^{]p[}$ défini ci-dessus et de $\mathscr{K}_p$ du n° 3.3.1, on fabrique un modèle de Kirillov global, $T[\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}_p}]$-équivariant :

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{K}_{\rm Aut}^T : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond) & = & \Pi^{]p[}(\rho_T^\diamond) \otimes_T (\rho_T \otimes_T \Pi_p(\rho_T^\diamond)) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty,p[,*}, \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}^{]p[}] \otimes T) \otimes_T \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \check{T} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{T} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-)
\end{array}$$

On promeut $\mathscr{K}_{\rm Aut}^T$ en un morphisme $T[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q},S}]$-équivariant

$$\mathscr{K}_{\rm Aut}^{\mathbb{G}} : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}_p}}^{\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q},S}} \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{T} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-), \quad \mathscr{K}_{{\rm Aut},v}^{\mathbb{G}}(g) = \mathscr{K}_{{\rm Aut},g\cdot v}^T$$

Proposition 3.36. — *Si $\overline{\rho}_T$ est irréductible, $\mathscr{K}_{\rm Aut}^{\mathbb{G}}$ est une isométrie sur son image.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la prop. 3.4 et de la définition de $\Pi(\rho_T^\diamond)$. $\square$

PARTIE II

COHOMOLOGIE D'ESPACES FONCTIONNELS ADÉLIQUES ET COHOMOLOGIE COMPLÉTÉE

4. Cohomologie de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et cohomologie complétée

Dans ce chapitre, on explique (rem. 4.7, 4.8 et 4.10) le lien entre la cohomologie complétée d'Emerton et la cohomologie de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à valeurs dans certains espaces fonctionnels adéliques comme $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$. Le lecteur souhaitant plus de détails est invité à consulter **[16]**. Enfin, on établit (cor. 4.16) une dualité entre $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ et $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$.

4.1. Cohomologie à support compact

4.1.1. Cocycles nuls sur le borel. — Si M est un $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-module, on définit la cohomologie à support compact $H_c^\bullet(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M)$ comme la cohomologie du cône $[\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M) \to \mathrm{R}\Gamma(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)]$. Elle est donc calculée par le complexe [16] (dans lequel on note simplement B et G les groupes $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$)

$$M \to \mathscr{C}(G, M) \oplus M \to \mathscr{C}(G\times G, M) \oplus \mathscr{C}(B, M) \to \mathscr{C}(G\times G\times G, M) \oplus \mathscr{C}(B\times B, M) \to \cdots,$$

où les flèches $\mathscr{C}(H^i, M) \to \mathscr{C}(H^{i+1}, M)$, pour $H = \mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q})$, sont les différentielles usuelles, les flèches $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q})^i, M) \to \mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{Q})^i, M)$ sont les restrictions, et les autres flèches sont nulles [17]. En particulier,

$$H_c^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M) = \frac{\{((c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}, c_B),\ c_{\sigma\tau} = \sigma\cdot c_\tau + c_\sigma,\ c_\sigma = (\sigma-1)\cdot c_B,\ \text{si } \sigma \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})\}}{\{(((\sigma-1)\cdot a)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}, a),\ a \in M\}}.$$

On note $Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)$ le module des 1-cocycles $(c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}$ sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, à valeurs dans M, qui sont identiquement nuls sur $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$. On dispose d'une application naturelle $Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M) \to H_c^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M)$ envoyant $(c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}$ sur la classe de $((c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}, 0)$.

Lemme 4.1. — *Cette application induit un isomorphisme naturel*

$$Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M) \xrightarrow{\sim} H_c^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M).$$

Démonstration. — Cela résulte de ce que

$$((c_\sigma)_\sigma, c_B) = ((c_\sigma - (\sigma-1)\cdot c_B)_\sigma, 0) + (((\sigma-1)\cdot c_B)_\sigma, c_B) \qquad \square$$

4.1.2. Le symbole modulaire $(0,\infty)$. — Soit $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, et soient $\mathrm{Div}(\mathbf{P}^1)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\mathbf{P}^1$ et $\mathrm{Div}^0(\mathbf{P}^1)$ le sous-$\mathbf{Z}$-module des $\sum_{x\in\mathbf{P}^1} n_x(x)$ vérifiant $\sum_{x\in\mathbf{P}^1} n_x = 0$. Si $a, b \in \mathbf{P}^1$, on note (a,b) l'élément $(b)-(a)$ de $\mathrm{Div}^0(\mathbf{P}^1)$. Les (a,b) forment une famille génératrice de $\mathrm{Div}^0(\mathbf{P}^1)$ et on a les relations $(a,a) = 0$ et $(a,b)+(b,c)+(c,a) = 0$ pour tous $a,b,c \in \mathbf{P}^1$.

Le groupe $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ agit sur $\mathbf{P}^1$ par $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)x = \frac{ax+b}{cx+d}$. Cette action est transitive et le stabilisateur de ∞ est le groupe $\mathbb{B}(\mathbf{Q}) = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}^* & \mathbf{Q}\\ 0 & \mathbf{Q}^*\end{smallmatrix}\right)$.

Lemme 4.2. — *Si M un $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-module, on a un isomorphisme naturel*

$$Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M) \cong H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Hom}(\mathrm{Div}^0(\mathbf{P}^1), M)).$$

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Div}^0(\mathbf{P}^1), M)$ est invariant par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, i.e. si

$$\gamma\cdot\alpha(a,b) = \alpha(\gamma\cdot a, \gamma\cdot b), \quad \text{pour tous } a,b \in \mathbf{P}^1,$$

16. $\mathscr{C}$ désigne les fonctions continues, mais comme $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ est discret, toutes les fonctions sont continues.

17. On définit de même $H_c^1(\Gamma(1), M)$.

on pose $c_\sigma = \alpha(\infty, \sigma\cdot\infty)$. Alors $c_\sigma = 0$ si $\sigma \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})$ puisque $\sigma\cdot\infty = \infty$, et

$$c_{\sigma\tau} = \alpha(\infty, \sigma\cdot\infty) + \alpha(\sigma\cdot\infty, \sigma\tau\cdot\infty) = c_\sigma + \sigma(\alpha(\infty, \tau\cdot\infty)) = c_\sigma + \sigma\cdot c_\tau,$$

ce qui prouve que $(c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \in Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)$.

Réciproquement, si $(c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \in Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)$, et si $a, b \in \mathbf{P}^1$, on choisit $\sigma_a, \sigma_b \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$ avec $\sigma_a\cdot\infty = a$ et $\sigma_b\cdot\infty = b$, et on pose $\alpha(a,b) = c_{\sigma_b} - c_{\sigma_a}$ (notons que c_{σ_x} ne dépend que de x, et pas de σ_x car si $\sigma\cdot\infty = \sigma'\cdot\infty$, il existe $\gamma \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})$ tel que $\sigma = \sigma'\gamma$ et alors $c_\sigma = \sigma'\cdot c_\gamma + c_{\sigma'} = c_{\sigma'}$ puisque $c_\gamma = 0$ par hypothèse). Alors

$$\alpha(\gamma\cdot a, \gamma\cdot b) = c_{\gamma\sigma_b} - c_{\gamma\sigma_a} = \gamma\cdot c_{\sigma_b} - c_\gamma - \gamma\cdot c_{\sigma_a} + c_\gamma = \gamma\cdot\alpha(a,b).$$

Les deux flèches construites ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. □

Remarque 4.3. — (i) En combinant les lemmes 4.1 et 4.2, on obtient un isomorphisme naturel

$$H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Hom}(\mathrm{Div}^0(\mathbf{P}^1), M)) \cong H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M).$$

(ii) L'isomorphisme ci-dessus fournit, si $a, b \in \mathbf{P}^1$, une application naturelle

$$(a,b) : H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M) \to M.$$

Cette application est définie comme suit : si $c \in H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M)$ et si $(c_\sigma)_{\sigma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}$ est l'élément de $Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)$ correspondant à c, alors

$$\langle (a,b), c\rangle = c_{\alpha_b} - c_{\alpha_a}, \quad \text{où } \alpha_a, \alpha_b \in G(\mathbf{Q}) \text{ vérifient } \alpha_a\cdot\infty = a \text{ et } \alpha_b\cdot\infty = b.$$

En particulier,

$$\langle (0,\infty), c\rangle = -c_S, \quad \text{avec } S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

4.2. Espaces fonctionnels adéliques

4.2.1. Représentations algébriques. — On note $W^*_{k,j}$ la $\mathbf{Q}$-représentation

$$W^*_{k,j} = \mathrm{Sym}^k \otimes \det^{-j}$$

de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, où Sym^k est la puissance symétrique de la représentation standard de dimension 2 de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, et $W_{k,j}$ sa duale. La représentation Sym^1 est donc la représentation standard : i.e. c'est l'espace $\mathbf{Q}e_1^* \oplus \mathbf{Q}e_2^*$ muni de l'action

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * e_1^* = ae_1^* + ce_2^*, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * e_2^* = be_1^* + de_2^*.$$

La représentation $W^*_{k,j}$ admet comme base les $(e_1^*)^i(e_2^*)^{k-i}(e_1^*\wedge e_2^*)^{-j}$ (avec action évidente de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$), pour $0 \le i \le k$. Si e_1, e_2 est la base de $(\mathrm{Sym}^1)^*$ duale de e_1^*, e_2^*, alors

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * e_1 = \frac{de_1 - be_2}{ad-bc}, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * e_2 = \frac{-ce_1 + ae_2}{ad-bc}, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * (e_1\wedge e_2) = \frac{e_1\wedge e_2}{ad-bc}$$

et $W_{k,j}$ admet comme base les $(e_1)^i(e_2)^{k-i}(e_1\wedge e_2)^{-j}$, pour $0 \le i \le k$.

Les $W_{k,j}$, pour $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, sont toutes les représentations algébriques irréductibles de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et on a

$$W_{k,j}^* \cong W_{k,k-j}.$$

Si L est un corps de caractéristique 0, notons $W_{k,j}^*(L)$ la représentation algébrique de $\mathbb{G}(L)$

$$W_{k,j}^*(L) = L \otimes_{\mathbf{Q}} W_{k,j}^*,$$

et posons

$$W_{\mathrm{tot}}(L) = \oplus_{k,j} W_{k,j} \otimes W_{k,j}^*(L).$$

On munit $W_{\mathrm{tot}}(L)$ d'une action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(L)$ en faisant agir $(h_1, h_2) \in \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(L)$ par h_1 sur $W_{k,j}$ et h_2 sur $W_{k,j}^*(L)$.

Soit $\mathrm{Alg}(\mathbb{G}, L)$ l'espace des fonctions algébriques sur $\mathbb{G}(L)$, à valeurs dans L (i.e. l'espace des fonctions polynomiales, à coefficients dans L, en $a, b, c, d, (ad - bc)^{-1}$, si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(L)$). On fait agir $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(L)$ sur $\mathrm{Alg}(\mathbb{G}, L)$ par

$$(h_1, h_2) \cdot \phi(g) = \phi(h_1^{-1} g h_2).$$

Si $v \in W_{k,j}$ et $\check{v} \in W_{k,j}^*(L)$, la fonction

$$g \mapsto \phi_{\check{v},v}(g) = \langle g \cdot \check{v}, v \rangle$$

est un élément de $\mathrm{Alg}(\mathbb{G}, L)$, et l'application $\check{v} \otimes v \mapsto \phi_{\check{v},v}$, de $W_{k,j}^*(L) \otimes W_{k,j}$ dans $\mathrm{Alg}(\mathbb{G}, L)$, est $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(L)$-équivariante car $\langle h_1^{-1} g h_2 \cdot \check{v}, v \rangle = \langle g h_2 \cdot \check{v}, h_1 \cdot v \rangle$. Ceci fournit un isomorphisme $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(L)$-équivariant

$$W_{\mathrm{tot}}(L) \cong \mathrm{Alg}(\mathbb{G}, L).$$

4.2.2. Fonctions localement algébriques. — Si Λ est un anneau, soit $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \Lambda)$ l'espace des $\phi : \mathbb{G}(\mathbf{A}) \to \Lambda$ localement constantes. Notons qu'une telle fonction est constante sur les classes modulo $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ puisque ce groupe est connexe.

L'espace $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)$ est muni d'actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ données par :

$$(\gamma * \phi)(x) = \phi(\gamma^{-1} x), \text{ si } \gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q}), \quad (g \star \phi)(x) = \phi(xg), \text{ si } g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}).$$

Ces deux actions commutent (et donc définissent une action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(\mathbf{A})$).

Si L est un corps de caractéristique 0, cela munit l'espace

$$\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L) = \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L) \otimes_L \mathrm{Alg}(\mathbb{G}, L)$$

des fonctions localement algébriques sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ d'actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ (action diagonale des actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$) et de $\mathbb{G}(\mathbf{A}) \times \mathbb{G}(L)$.

4.2.3. Fonctions continues et mesures. — Si Λ est un anneau topologique, on note $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ à valeurs dans Λ. Si Λ est totalement discontinu, une telle fonction est constante sur les classes modulo $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ puisque ce groupe est connexe. On munit $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ des actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ comme ci-dessus :

$$(\gamma * \phi)(x) = \phi(\gamma^{-1}x),\ \text{si } \gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\quad (g\star\phi)(x)=\phi(xg),\ \text{si } g\in\mathbb{G}(\mathbf{A}).$$

Ces actions commutent.

Si Λ est totalement discontinu, on note $\mathscr{C}_c(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ l'espace des fonctions continues à support compact modulo $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$, et $\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ son Λ-dual topologique (l'espace des *mesures sur* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ *à valeurs dans* Λ). On munit $\mathscr{C}_c(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ des actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ sur $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$, et $\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ des actions qui s'en déduisent par dualité.

4.2.4. Injection dans les fonctions continues. — Si v est une place de $\mathbf{Q}$ et si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_v$, on dispose d'un morphisme naturel $\mathbb{G}(\mathbf{A})\to\mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)\hookrightarrow\mathbb{G}(L)$ et on peut faire agir $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ sur $\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$ via le morphisme diagonal $\mathbb{G}(\mathbf{A})\to\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{G}(L)$ et l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{G}(L)$ sur $\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$. Par ailleurs, l'application $\phi\otimes P\mapsto\phi P$ induit une injection

$$\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)\hookrightarrow\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)\,,$$

qui est $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\times\mathbb{G}(\mathbf{A})$-équivariante si on munit $\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$ de l'action définie par ce qui précède.

4.3. La cohomologie complétée

4.3.1. Induction de $\Gamma(1)$ *à* $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$. — On note Γ le groupe $\Gamma(1)=\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$. Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Lemme 4.4. — *On a un isomorphisme de* $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$*-modules :*

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)=\mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L).$$

Démonstration. — Si $\phi\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$, alors ϕ est constante sur les classes modulo $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$. Si $\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, soit $\phi_\gamma\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L)$ définie par $\phi_\gamma(\kappa)=\phi(\gamma^{-1}x_\infty\kappa)$ pour n'importe quel choix de $x_\infty\in\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ (le résultat ne dépend pas de ce choix d'après ce qui précède).

Si $\alpha\in\Gamma$, alors

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\gamma}(\kappa)=\phi(\gamma^{-1}\alpha^{-1}x_\infty\kappa)&=\phi(\gamma^{-1}(\alpha_\infty^{-1}x_\infty)((\alpha^{]\infty[})^{-1}\kappa))\\&=\phi_\gamma((\alpha^{]\infty[})^{-1}\kappa)=(\alpha*\phi_\gamma)(\kappa),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\in\mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$.

Réciproquement, si $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\in\mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$, on définit $\phi\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$, en posant $\phi(\gamma^{-1}x_\infty\kappa)=\phi_\gamma(\kappa)$: tout élément $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ peut s'écrire sous la forme $\gamma^{-1}x_\infty\kappa$, avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, $x_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et $\kappa \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et une telle écriture est unique à changements simultanés $\gamma \mapsto \alpha\gamma$, $x_\infty \mapsto \alpha_\infty x_\infty$ et $\kappa \mapsto \alpha^{]\infty[}\kappa$, avec $\alpha \in \Gamma$; la condition $\phi_{\alpha\gamma} = \alpha * \phi_\gamma$ est exactement la condition qu'il faut pour que ϕ soit bien définie. □

Remarque 4.5. — (i) On a $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L) = \varinjlim_N \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), L)$, et la preuve ci-dessus permet de montrer que

$$\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L) = \varinjlim_N \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), L).$$

(ii) Pour les mêmes raisons, on a :

$$\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L) = \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L).$$

4.3.2. Descente de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ *à* $\Gamma(1)$. — Compte-tenu du lemme 4.4 et de la rem. 4.5, le lemme de Shapiro nous donne :

Proposition 4.6. — *Si* $X = \mathscr{C}$, Mes, LC, LP, *on a des isomorphismes naturels :*

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)) \cong H^1(\Gamma, X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L)).$$

Remarque 4.7. — (i) On a des isomorphismes :

- $H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L)) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L))$.
- $H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L)) = \varprojlim_n H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L/p^n))$.
- $H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L/p^n)) = \varinjlim_N H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), \mathscr{O}_L/p^n))$.
- $H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), \mathscr{O}_L/p^n)) = H^1(Y(N)_{\mathbf{C}}, \mathscr{O}_L/p^n)$, où $Y(N)$ est la courbe modulaire de niveau N du chap. 6.

On en déduit, en utilisant la prop. 4.6, que $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ est la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires de tous niveaux. De même $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ est la cohomologie à support compact complétée de la tour des courbes modulaires de tous niveaux.

(ii) On a une suite exacte de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-modules (où $\mathscr{C}(-) = \mathscr{C}(-, L)$ ou $\mathscr{C}(-, \mathscr{O}_L)$)

$$0 \to \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^* \times \widehat{\mathbf{Z}}^*) \to H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to 0$$

où $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ est vu comme le quotient $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{Q}^*$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit à travers le déterminant sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$ et $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ à travers le tore diagonal sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^* \times \widehat{\mathbf{Z}}^*)$. Il en résulte que la différence entre cohomologie complétée et cohomologie complétée à support compact est très petite ; en particulier, les deux espaces deviennent isomorphes quand on localise en un idéal non-eisenstein.

(iii) L'isomorphisme $H^1(Y(N)_{\mathbf{C}}, \mathscr{O}_L/p^n) \cong H^1_{\text{ét}}(Y(N)_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathscr{O}_L/p^n)$ (et de même pour la cohomologie à support compact) permet de munir tous les groupes ci-dessus d'une action de $G_{\mathbf{Q}}$. Une autre manière de le faire est d'utiliser le fait que la cohomologie de Γ à valeurs dans des groupes comme ci-dessus est aussi celle de son complété profini $\widehat{\Gamma}$ car Γ contient un sous-groupe d'indice fini qui est un groupe libre. Or on dispose d'une extension non triviale $\Pi_{\mathbf{Q}}$ de $G_{\mathbf{Q}}$ par $\widehat{\Gamma}$ (cf. n° 5.1.2), ce qui munit la cohomologie de $\widehat{\Gamma}$ d'une action de $G_{\mathbf{Q}}$. Les deux actions précédentes coïncident car $\Pi_{\mathbf{Q}}$ est le groupe fondamental arithmétique de $Y(1)$ vu comme champs algébrique, et $\widehat{\Gamma}$ en est le groupe fondamental géométrique (et sa cohomologie coïncide avec la cohomologie étale puisque les courbes sont des $K(\pi,1)$).

Remarque 4.8. — (i) Plutôt que la cohomologie complétée de la tour de tous niveaux, Emerton fixe le niveau N hors de p, complète le long de la tour des courbes de niveau Np^k, pour $k\in\mathbf{N}$, et prend la limite inductive sur N. La cohomologie complétée $\widehat{H}^1(N)$ le long de la tour des courbes de niveau Np^k est

$$\widehat{H}^1(N)=H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p\times(\mathbf{Z}/N)),L)).$$

Il s'ensuit, via le lemme de Shapiro, que ce que considère Emerton est

$$H^1(\Gamma,\varinjlim_N\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p\times(\mathbf{Z}/N)),L))\cong H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)),$$

où $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)\subset\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$ est le sous-espace des fonctions localement lisses pour $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$.

(ii) Si M est un Γ-module, il résulte de la description du § 4.4 ci-dessous, que les groupes $H^1_c(\Gamma,M)$ et $H^1(\Gamma,M)$ sont des sous-quotients de M. Comme le $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-module $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p\times(\mathbf{Z}/N)),L)$ est une représentation admissible de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, il en est de même de $\widehat{H}^1(N)$ et de sa variante à support compact (cas particulier de [**25**, th. 2.1.5]).

(iii) L'injection $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-équivariante $\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)\hookrightarrow\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$ fournit, d'après Emerton [**25**, (4.3.4)] et [**26**, th. 7.4.2], des identifications

$$\begin{aligned}(4.9)\quad H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))^{\mathrm{alg}}&=H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))\\&=\oplus_{k,j}H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)\otimes_{\mathbf{Q}}W_{k,j})\otimes W^*_{k,j}(L)\end{aligned}$$

où $^{\mathrm{alg}}$ désigne l'espace des vecteurs localement algébriques. (Dans la décomposition ci-dessus, l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ sur $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{Q}_p)\otimes_{\mathbf{Q}}W_{k,j})$ est lisse, et algébrique sur $W^*_{k,j}(L)$ sur lequel $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit à travers $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$.)

Remarque 4.10. — Soit $S\subset\mathscr{P}\cup\{\infty\}$ fini. Si $\infty\in S$ (resp. $\infty\notin S$), tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ s'écrit sous la forme $\gamma^{-1}x_\infty\kappa$ (resp. $\gamma^{-1}\kappa$), avec $\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$, $x_\infty\in\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et $\kappa\in\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S)$, et une telle écriture est unique à changements simultanés $\gamma\mapsto\alpha\gamma$, $x_\infty\mapsto\alpha_\infty x_\infty$ et $\kappa\mapsto\alpha_{S\setminus\{\infty\}}\kappa$, avec $\alpha\in\Gamma$ (resp. $\alpha\in\mathbb{G}(\mathbf{Z})$). On en déduit des isomorphismes de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$-modules, si $X=\mathscr{C}$, LC, LP, Mes :

$$X(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),L)=\begin{cases}\mathrm{Ind}_{\Gamma}^{\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])}X(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),L) & \text{si } \infty\in S,\\ \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}(\mathbf{Z})}^{\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])}X(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),L) & \text{si } \infty\notin S\end{cases}$$

En particulier, si $\infty \in S$, alors $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$ est la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires de niveaux dont les facteurs premiers appartiennent à S, et $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$ en est la cohomologie à support compact complétée.

4.3.3. Descente de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ *à* $\Gamma(1)$ *pour la cohomologie à support compact.* — Le lemme de Shapiro n'a, a priori, pas de raison d'être vrai pour la cohomologie à support compact (on a quand même une flèche naturelle $H^i_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} M) \to H^i_c(\Gamma, M)$ obtenue en évaluant les fonctions $\phi : \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \to M$ en 1). Mais on a le résultat suivant :

Proposition 4.11. — *L'application naturelle induit un isomorphisme*

$$H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)) \xrightarrow{\sim} H^1_c(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L))$$

Démonstration. — On a un diagramme commutatif à lignes exactes, où

$$B = \mathbb{B}(\mathbf{Q}), \quad ,G = \mathbb{G}(\mathbf{Q}), \quad U = \mathbb{B}(\mathbf{Q}) \cap \Gamma, \quad \mathscr{C}_{\mathbf{A}} = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L), \quad \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}} = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L)$$

et les deux isomorphismes verticaux résultent du lemme de Shapiro :

$$\begin{tikzcd}
H^0(G, \mathscr{C}_{\mathbf{A}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^0(B, \mathscr{C}_{\mathbf{A}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_c(G, \mathscr{C}_{\mathbf{A}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G, \mathscr{C}_{\mathbf{A}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(B, \mathscr{C}_{\mathbf{A}}) \arrow[d] \\
H^0(\Gamma, \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^0(U, \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^1_c(\Gamma, \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^1(\Gamma, \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^1(U, \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}})
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, grâce au lemme des 5, il suffit de vérifier que les flèches $H^i(B, \mathscr{C}_{\mathbf{A}}) \to H^i(U, \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}})$, pour $i = 0, 1$, sont des isomorphismes.

On a $\mathbb{G}(\mathbf{A}) = \mathbb{B}(\mathbf{Q}) \cdot (\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+)$ et $\mathbb{B}(\mathbf{Q}) \cap (\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+) = U$. Il en résulte que $\mathscr{C}_{\mathbf{A}} \cong \mathrm{Ind}_U^B \mathscr{C}_{\widehat{\mathbf{Z}}}$, et on conclut en utilisant le lemme de Shapiro. $\square$

Remarque 4.12. — (i) On montre de même que $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L)) \to H^1_c(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S), L))$ est un isomorphisme.

(ii) On a les mêmes résultats en remplaçant $\mathscr{C}$ par $\mathscr{C}^{(p)}$.

4.4. Dualité

Soient $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ et $\overline{\Gamma} = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/\{\pm I\}$, où $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si M est un Γ-module, on a $H^i(\Gamma, M) = H^i(\overline{\Gamma}, M^{\{\pm I\}})$ à 2-torsion près. Le groupe $\overline{\Gamma}$ est engendré par $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, les seules relations étant $S^2 = 1$ et $U^3 = 1$. De plus, si $\overline{B} \subset \overline{\Gamma}$ est l'image de $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors SU est un générateur de $\overline{B}$ (c'est l'image de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$).

Si M est un $\mathbf{Z}_p[\overline{\Gamma}]$-module, on note M^* son dual (suivant les cas, cela peut être le dual de Pontryagin, le $\mathbf{Z}_p$-dual, ou le $\mathbf{Q}_p$-dual (ou L-dual) topologique). Le groupe $H^1_c(\overline{\Gamma}, M^*)$ est le groupe des 1-cocycles $\sigma \mapsto c^*_\sigma$ sur $\overline{\Gamma}$, à valeurs dans M^*, qui sont identiquement nuls sur $\overline{B}$. Un tel cocycle est entièrement déterminé par c^*_U et c^*_S, et on a $(1+S)c^*_S = 0$ et $(1+U+U^2)c^*_U = 0$ (à cause des relations $S^2 = 1$ et $U^3 = 1$)

et la relation $c^*_{SU} = 0$ impose en plus que $Sc^*_U + c^*_S = 0$, ou encore $Sc^*_U - Sc^*_S = 0$, et donc $c^*_U = c^*_S$. Autrement dit, on a une identification

$$H^1_c(\overline{\Gamma}, M^*) = (M^*)^{1+U+U^2=0} \cap (M^*)^{1+S=0}.$$

Maintenant, un 1-cocycle $\sigma \mapsto c_\sigma$ sur $\overline{\Gamma}$, à valeurs dans M, est uniquement déterminé par c_U et c_S soumis aux relations $(1+S)c_S = 0$ et $(1+U+U^2)c_U = 0$. La classe de cohomologie de ce cocycle ne change pas si on remplace (c_U, c_S) par $(c_U - (U-1)c, c_S - (S-1)c)$, avec $c \in M$. Cela permet, à 2-torsion près, de supposer que $c_S = 0$, et alors la classe de cohomologie est déterminée par c_U à addition près de $(U-1)c$, avec $c \in M^{S=1}$. On a donc un isomorphisme

$$H^1(\overline{\Gamma}, M) \cong M^{1+U+U^2=0}/(U-1)M^{S=1} \tag{4.13}$$

Notons $\langle\ ,\ \rangle : M^* \times M \to \Lambda$, où $\Lambda = \mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Q}_p, L$..., l'accouplement naturel. On définit un accouplement

$$H^1_c(\overline{\Gamma}, M^*) \times H^1(\overline{\Gamma}, M) \to \Lambda$$

en utilisant les identification précédentes : si

$$c^* \in \big((M^*)^{1+U+U^2=0} \cap (M^*)^{1+S=0}\big), \quad c \in \big(M^{1+U+U^2=0}/(U-1)M^{S=1}\big),$$

on pose

$$c^* \cup c = 2\langle c^*, (1-U^2)c\rangle.$$

Proposition 4.14. — *L'accouplement $\cup$ induit un isomorphisme (à 6-torsion près)*

$$H^1_c(\overline{\Gamma}, M^*) \cong H^1(\overline{\Gamma}, M)^*$$

Démonstration. — Les espaces $(M^*)^{1+U+U^2=0}$ et $M^{1+U+U^2=0}$ sont en dualité pour l'accouplement naturel $M^* \times M \to \Lambda$, et $c \mapsto (1-U^2)c$ est un isomorphisme de $M^{1+U+U^2=0}$ à 3-torsion près (noyau et conoyau sont tués par 3). De plus, l'orthogonal de $(U-1)M^{S=1}$ (dans $(M^*)^{1+U+U^2=0}$) pour l'accouplement $\langle c^*, (1-U^2)c\rangle$ est l'ensemble des c^* tels que $\langle c^*, (1-U^2)(U-1)c\rangle = 0$ pour tout $c \in M^{S=1}$. Or $(1-U^2)(U-1) = -(U^2+U+1) - 3$ et l'adjoint de U^2+U+1 est $U^{-2}+U^{-1}+1 = U+U^2+1$ qui tue c^*. L'orthogonal de $(U-1)M^{S=1}$ est donc l'ensemble des c^* vérifiant $\langle c^*, 3c\rangle = 0$ pour tout $c \in M^{S=1}$; c'est donc $(M^*)^{S+1=0}$ (à 6-torsion près). □

Remarque 4.15. — (i) L'accouplement ci-dessus est l'accouplement naturel à valeurs dans $H^2_c(\overline{\Gamma}, \Lambda) \cong \Lambda$.

(ii) On en déduit une dualité à 12-torsion près $H^1_c(\Gamma(1), M^*) \times H^1(\Gamma(1), M) \to \Lambda$.

Corollaire 4.16. — *Les groupes $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ et $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ sont en dualité.*

Démonstration. — D'après les prop. 4.6 et 4.11, on a des isomorphismes :

$$H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)) \cong H^1_c(\Gamma(1), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L))$$
$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)) \cong H^1(\Gamma(1), \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L))$$

La prop. 4.14 (cf. rem. 4.15) implique donc une dualité dans un sens. Pour en déduire celle dans l'autre sens, il suffit de vérifier que $H^1(\Gamma, \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L))$ est sans p-torsion, ce qui résulte de ce que $H^0(\Gamma, \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), k_L)) = 0$ car une mesure invariante par Γ l'est aussi par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subset \left(\begin{smallmatrix} 1 & \widehat{\mathbf{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ par continuité de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \widehat{\mathbf{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc est nulle (pas de mesure de Haar en p-adique). □

Remarque 4.17. — On montre de même que les groupes $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$ et $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]), \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$ sont en dualité.

4.5. Action du centre

Si $a \in \mathbf{A}^*$, soit $z(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$.

Lemme 4.18. — *Si $a \in \mathbf{Q}^*$ plongé diagonalement dans $\mathbf{A}^*$, alors $z(a)$ agit trivialement sur $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ et $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$.*

Démonstration. — Soit $\phi \in H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$, et soit $\gamma \mapsto \phi_\gamma$ un 1-cocycle représentant ϕ. Alors $z(a) \star \phi$ est représenté par le cocycle $\gamma \mapsto z(a) \star \phi_\gamma$. Comme $z(a)$ est dans le centre de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et aussi élément de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, on a aussi, en posant $\alpha := z(a)^{-1}$,

$$z(a) \star \phi_\gamma = \alpha * \phi_\gamma = \phi_{\alpha\gamma} - \phi_\alpha = \phi_{\gamma\alpha} - \phi_\alpha = (\gamma - 1) * \phi_\alpha + \phi_\gamma$$

et donc $\gamma \mapsto z(a) \star \phi_\gamma$ diffère de $\gamma \mapsto \phi_\gamma$ par un cobord. Cela prouve le résultat pour H^1.

Pour H^1_c, on a en plus la condition $\phi_\gamma = (\gamma - 1) * \phi_B$, si $\gamma \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})$, mais $((\gamma \mapsto z(a) \star \phi_\gamma), z(a) \star \phi_B) - ((\gamma \mapsto \phi_\gamma), \phi_B)$ est le bord de ϕ_α plus $((\gamma \mapsto 0), (\alpha - 1) * \phi_B - \phi_\alpha)$, et ce dernier terme est nul puisque $\alpha \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})$. □

Corollaire 4.19. — *Le centre de* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ (identifié à $\mathbf{A}^*$) *agit à travers* $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^* \cong \widehat{\mathbf{Z}}^*$ *sur* $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ *et* $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$.

4.6. Densité des vecteurs algébriques

On rappelle que $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont les générateurs habituels de $\Gamma(1)$. Si M est un $\Gamma(1)$-module, on a une suite exacte (à 2-torsion près), cf. (4.13)

$$0 \to H^0(\Gamma(1), M) \to M^{S=1} \xrightarrow{U-1} M^{1+U+U^2=0} \to H^1(\Gamma(1), M) \to 0$$

et $M^{S=1} = (S-1)((-I)+1)M$ (à 2-torsion près), $M^{1+U+U^2=0} = (U-1)((-I)+1)M$ (à 6-torsion près). En particulier $H^1(\Gamma(1), M)$ est un quotient de M (à 6-torsion près).

Soit N premier à p, et soit $\widehat{H}^1(N) := H^1(G_{\mathbf{Q}}, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty), \mathscr{O}_L))$.

Proposition 4.20. — (Emerton, [**27**, prop. 5.4.1]) *Les vecteurs $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-algébriques sont denses dans $\widehat{H}^1(N)$.*

Démonstration. — Cela résulte de ce que, si $M := \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), \mathscr{O}_L)$, alors $\widehat{H}^1(N) = H^1(\Gamma(1), M)$ est un quotient de M et de ce que les vecteurs $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-algébriques sont denses dans $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p), \mathscr{O}_L)$ (Stone-Weierstrass, densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact). □

Proposition 4.21. — (Emerton, [**27**, prop. 5.3.15]) *Supposons $\mathfrak{m}$ non-eisenstein.*

(i) *Si $p \geq 5$, alors $\widehat{H}^1(N)_{\mathfrak{m}}$ est injectif comme $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-module.*

(ii) *Si K_p est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$ qui se surjecte sur $\mathbf{Z}_p^*$ et tel que $\Gamma(1) \cap K_p\widehat{\Gamma}(Np^\infty)$ est sans torsion, alors $\widehat{H}^1(N)_{\mathfrak{m}}$ est injectif comme K_p-module.*

Démonstration. — (i) Si $M = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), \mathscr{O}_L)$, alors $M^{1+U+U^2=0}$ et $M^{S=1}$ sont des facteurs directs de M (à 6-torsion près, d'où l'hypothèse $p \geq 5$), et leurs localisés en $\mathfrak{m}$ aussi puisque $T_{\mathfrak{m}}$ est un facteur direct de T. Comme M est injectif, il en est de même de $M_{\mathfrak{m}}^{1+U+U^2=0}$ et $M_{\mathfrak{m}}^{S=1}$.

Maintenant $H^0(\Gamma(1), M)_{\mathfrak{m}} = 0$ car $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein. On a donc une suite exacte $0 \to M_{\mathfrak{m}}^{S=1} \to M_{\mathfrak{m}}^{1+U+U^2} \to \widehat{H}^1(N)_{\mathfrak{m}} \to 0$, qui présente $\widehat{H}^1(N)_{\mathfrak{m}}$ comme un quotient de modules injectifs. Le résultat s'en déduit.

(ii) L'hypothèse implique que $\Gamma_U := \Gamma(1) \cap K_p\widehat{\Gamma}(Np^\infty)$ est libre de type fini. Si M est un Γ_U-module et si I est un ensemble de générateurs de Γ_U, on a une suite exacte $0 \to H^0(\Gamma_U, M) \to M \to M^I \to H^1(\Gamma_U, M) \to 0$. Par ailleurs, le lemme de Shapiro fournit un isomorphisme $\widehat{H}^1(N) \cong H^1(\Gamma_U, \mathscr{C}(K_p \times \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), \mathscr{O}_L))$. On conclut comme ci-dessus, avec $M := \mathscr{C}(K_p \times \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), \mathscr{O}_L)$. □

5. Formes modulaires adéliques

Le but de ce chapitre est d'adéliser la théorie classique des formes modulaires.

5.1. Formes modulaires classiques

5.1.1. L'algèbre des formes modulaires. — Si $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, on définit une action à droite $(\gamma, f) \mapsto f_{|_{k,j}}\gamma$ de $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ sur les $f : \mathscr{H}^+ \to \mathbf{C}$, par la formule

$$(f_{|_{k,j}}\gamma)(\tau) = \tfrac{(ad-bc)^{k-j}}{(c\tau+d)^k} f\big(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\big), \quad \text{si } \gamma = \big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big).$$

Si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma(1) = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, on note $M_{k,j}^{\mathrm{cl}}(\Gamma, \mathbf{C})$ (resp. $M_{k,j}^{\mathrm{par,\,cl}}(\Gamma, \mathbf{C})$), le $\mathbf{C}$-espace vectoriel *des formes modulaires de poids* (k, j) *pour* Γ, c'est-à-dire, l'ensemble des $f : \mathscr{H}^+ \to \mathbf{C}$, holomorphes, à croissance lente (resp. à décroissance rapide) à l'infini, vérifiant $f_{|_{k,j}}\gamma = f$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$ (l'espace ne dépend pas de j puisque $ad - bc = 1$, mais l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$ en dépend ; on note cet espace simplement $M_k^{\mathrm{cl}}(\Gamma, \mathbf{C})$ si on ne veut pas préciser l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$).

Si $f \in M_k^{\mathrm{cl}}(\Gamma, \mathbf{C})$, alors f est périodique de période N pour un certain entier $N \geq 1$, et f est somme de sa série de Fourier

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n/N} e^{2i\pi n\tau/N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n/N} q^{n/N}, \quad \text{avec } q = e^{2i\pi\tau}.$$

La série $\sum_{n \in \mathbf{Q}_+} a_n q^n$ s'appelle le *q-développement* de f. Si A est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, on note $M_k^{\mathrm{cl}}(\Gamma, A)$ le sous-A-module de $M_k^{\mathrm{cl}}(\Gamma, \mathbf{C})$ des formes dont le q-développement est à coefficients dans A et $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma, A)$ la A-algèbre des formes modulaires pour Γ à coefficients dans A, somme directe des $M_k^{\mathrm{cl}}(\Gamma, A)$, pour $k \geq 0$. Finalement, on note $M_k^{\mathrm{cl}}(A)$ (resp. $M^{\mathrm{cl}}(A)$) la réunion des $M_k^{\mathrm{cl}}(\Gamma, A)$ (resp. $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma, A)$), où Γ décrit l'ensemble des sous-groupes d'indice fini de $\Gamma(1)$.

5.1.2. Les groupes $\Pi_{\mathbf{Q}}$, $\Pi'_{\mathbf{Q}}$, $\Pi_{\mathbf{Q},S}$ et $\Pi'_{\mathbf{Q},S}$. — Si K est un corps de caractéristique 0, on pose $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(1), K) = K \otimes_{\mathbf{Q}} M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(1), \mathbf{Q})$ et $M^{\mathrm{cl}}(\overline{K}) = \overline{K} \otimes_{\overline{\mathbf{Q}}} M^{\mathrm{cl}}(\overline{\mathbf{Q}})$. On note Π_K le groupe des automorphismes de la K-algèbre $M^{\mathrm{cl}}(\overline{K})$ au-dessus de $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(1), K)$; c'est un groupe profini. Chacun des $M_k^{\mathrm{cl}}(\overline{K})$ est stable par Π_K.

Si K est algébriquement clos, alors Π_K est le complété profini de $\Gamma(1)$ (qui est beaucoup plus gros que $\mathbf{SL}_2(\widehat{\mathbf{Z}})$). Dans le cas général, on dispose de la suite exacte

$$1 \to \Pi_{\overline{K}} \to \Pi_K \to G_K \to 1,$$

scindée, G_K agissant sur les coefficients du q-développement des formes modulaires.

Par ailleurs, l'algèbre $M^{\mathrm{cl}}(\overline{\mathbf{Q}})$ est stable sous l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$ définie par $f \to f_{|}\gamma$, si $f \in M^{\mathrm{cl}}(\overline{\mathbf{Q}})$ et $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$, avec $f_{|}\gamma = f_{|_{k,0}}\gamma$ si $f \in M_k^{\mathrm{cl}}(\overline{\mathbf{Q}})$. Il en est donc de même de $M^{\mathrm{cl}}(\overline{K})$ et on note Π'_K le sous-groupe des automorphismes de $M^{\mathrm{cl}}(\overline{K})$ engendré par Π_K et $\mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$, et encore $f \to f_{|}\gamma$ l'action de $\gamma \in \Pi'_K$ sur $f \in M^{\mathrm{cl}}(\overline{K})$. Si $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, on note $f \mapsto f_{|_{k,j}}\gamma$ l'action de $\gamma \in \Pi'_K$ sur $M_k^{\mathrm{cl}}(\overline{K}) \subset M^{\mathrm{cl}}(\overline{K})$ coïncidant avec l'action définie au n$^{\mathrm{o}}$ 5.1.1 si $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$.

Si K est algébriquement clos, Π'_K est le complété de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ pour la topologie de groupe dont une base de voisinage de 1 est constituée des sous-groupes d'indice fini de $\Gamma(1)$. Dans le cas général, on dispose de la suite exacte, scindée

$$1 \to \Pi'_{\overline{K}} \to \Pi'_K \to G_K \to 1.$$

5.1.3. Sous-groupes de congruence. — On note M^{cong} (resp. M_S^{cong}) la réunion des $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(N), \mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_N))$, où N décrit les entiers ≥ 1 (resp. les entiers ≥ 1 à support dans S). La sous-algèbre M^{cong} est stable par $\Pi_{\mathbf{Q}}$ et $\Pi'_{\mathbf{Q}}$ qui agissent à travers $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ respectivement. On a le diagramme commutatif de groupes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \Pi_{\overline{K}} & \longrightarrow & \Pi_K & \longrightarrow & G_K & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathrm{cong}}} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbf{SL}_2(\widehat{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{\det} & \widehat{\mathbf{Z}}^* & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

La section de $G_{\mathbf{Q}}$ dans $\Pi_{\mathbf{Q}}$ décrite ci-dessus induit une section de l'application déterminant $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \to \widehat{\mathbf{Z}}^*$; c'est celle qui envoie u sur la matrice $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: l'action $f_{|_{k,j}}\gamma$ de $G(\mathbf{A}^{]\infty[})$ sur M_k^{cong} est celle obtenue par continuité à partir de celle du n° 5.1.1 si $\det\gamma \in \mathbf{Q}_+^*$, et l'action de $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, si $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ est celle de σ_u sur les coefficients du q-développement (en accord avec la théorie géométrique, cf. prop. 6.6).

Le noyau H de l'application naturelle $\Pi'_{\mathbf{Q}} \to \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ est inclus dans $\Pi_{\mathbf{Q}}$ puisqu'il fixe $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(1), \mathbf{Q})$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Pi_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\rho_{\mathrm{cong}}"] \arrow[d] & \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r] & \Pi'_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "\rho_{\mathrm{cong}}"] & \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Soit $M_S^{\mathrm{cong},+}$ la clôture intégrale de $M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(1), \mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$ dans M_S^{cong} et soit M_S^+ l'extension étale maximale de $M_S^{\mathrm{cong},+}$. Alors $M_S^{\mathrm{cong},+}$ est contenue dans $M^{\mathrm{cl}}(\overline{\mathbf{Q}})$ et stable par $\Pi_{\mathbf{Q}}$; le groupe $\Pi_{\mathbf{Q},S} = \mathrm{Aut}(M_S^+/M^{\mathrm{cl}}(\Gamma(1), \mathbf{Z}[\frac{1}{S}]))$ est un quotient de $\Pi_{\mathbf{Q}}$. Par ailleurs, $M_S^{\mathrm{cong},+}$ est stable par $\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])_+ \subset \mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$, et donc M_S^+ aussi. On note $\Pi'_{\mathbf{Q},S}$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(M_S^+)$ engendré par $\Pi_{\mathbf{Q},S}$ et $\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])_+$. On a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & G_{\mathbf{Q}} \arrow[d] \\
\Pi_{\mathbf{Q},S} \arrow[r] & G_{\mathbf{Q},S}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H_S \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Pi_{\mathbf{Q},S} \arrow[r, "\rho_{\mathrm{cong}}"] \arrow[d] & \mathbb{G}(\mathbf{Z}_S) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & H_S \arrow[r] & \Pi'_{\mathbf{Q},S} \arrow[r, "\rho_{\mathrm{cong}}"] & \mathbb{G}(\mathbf{Q}_S) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

5.2. Formes modulaires adéliques quasi-holomorphes

5.2.1. Fonctions harmoniques. — On note $\mathscr{A}$ l'anneau des fonctions $\phi : \mathbb{G}(\mathbf{A}) \to \mathbf{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ϕ se factorise à travers $\mathscr{H} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$,
- si $g^{]\infty[} \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, alors $\tau \mapsto \phi(\tau, g^{]\infty[})$ est harmonique, à croissance lente,
- il existe $K_\phi \subset \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, ouvert, tel que $\phi(g_\infty, g^{]\infty[}\kappa) = \phi(g_\infty, g^{]\infty[})$ si $\kappa \in K_\phi$.

On note $\mathscr{A}^+$ le sous-espace de $\mathscr{A}$ des fonctions holomorphes en τ et $\mathscr{A}^-$ celui des fonctions antiholomorphes. Comme une fonction harmonique est somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe et que les constantes sont les seules fonctions à la fois holomorphes et antiholomorphes sur un domaine connexe, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C}) \to \mathscr{A}^+ \oplus \mathscr{A}^- \to \mathscr{A} \to 0.$$

On note $\mathscr{A}_{\mathrm{par}}$ l'idéal de $\mathscr{A}$ des fonctions à décroissance rapide à l'infini (le « par » signifie « parabolique »), et $\mathscr{A}^+_{\mathrm{par}}$, $\mathscr{A}^-_{\mathrm{par}}$ ses intersections avec $\mathscr{A}^+$ et $\mathscr{A}^-$. On a $\mathscr{A}_{\mathrm{par}} = \mathscr{A}^+_{\mathrm{par}} \oplus \mathscr{A}^-_{\mathrm{par}}$ car les constantes ne sont pas à décroissance rapide.

On fait agir $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ sur $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_{\mathrm{par}}$ par les formules

$$(\gamma * \phi)(x) = \phi(\gamma^{-1}x) \quad \text{et} \quad (g \star \phi)(x) = \phi(xg).$$

Les actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ ainsi définies commutent. L'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ est lisse ; on la prolonge en une action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, qui commute encore à celle de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, en faisant agir $\mathbb{G}(\mathbf{R})$ sur $\mathscr{H}$ comme expliqué au n° 1.2.1. De manière explicite,

$$(g_\infty \star \phi)(\tau, x^{]\infty[}) = \begin{cases} \phi(\tau, x^{]\infty[}) & \text{si } \mathrm{sign}(g_\infty) = 1, \\ \phi(\overline{\tau}, x^{]\infty[}) & \text{si } \mathrm{sign}(g_\infty) = -1. \end{cases}$$

L'action de $\mathbb{G}(\mathbf{R}) \subset \mathbb{G}(\mathbf{A})$ se factorise donc à travers $\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et, si g_∞ appartient au normalisateur de $\mathbf{C}^*$, alors $(g_\infty \star \phi)(\tau, x^{]\infty[}) = \phi(\tau g_\infty, x^{]\infty[})$.

Les espaces $\mathscr{A}^+$, $\mathscr{A}^-$, $\mathscr{A}^+_{\mathrm{par}}$ et $\mathscr{A}^-_{\mathrm{par}}$ sont stables par $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, mais $\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ échange $\mathscr{A}^+$ et $\mathscr{A}^-$, ainsi que $\mathscr{A}^+_{\mathrm{par}}$ et $\mathscr{A}^-_{\mathrm{par}}$.

5.2.2. Définition. — Le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{A} \otimes W_{k,j}$ est muni d'actions (diagonales) de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ qui commutent.

Comme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, on a

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * \phi\right)(\tau) = \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \tau\right) = \phi\left(\tfrac{d\tau-b}{-c\tau+a}\right)$$

et donc, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$,

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * (e_1 - \tau e_2) = \tfrac{1}{ad-bc}\left((de_1 - be_2) - \tfrac{d\tau-b}{-c\tau+a}(-ce_1 + ae_2)\right) = \tfrac{1}{-c\tau+a}(e_1 - \tau e_2).$$

Il s'ensuit que

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} = \tfrac{(ad-bc)^j}{(-c\tau+a)^k} \, \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j}.$$

Si $r \leq k$ le sous-$\mathscr{A}^+$-module

$$\mathrm{Fil}^{k-r-j}(\mathscr{A}^+ \otimes W_{k,j}) = \oplus_{\ell=0}^{r}\left(\mathscr{A}^+ \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^{k-\ell} e_1^\ell}{(e_1 \wedge e_2)^j}\right)$$

est stable par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et par $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$; ceci définit donc une filtration décroissante de $\mathscr{A}^+ \otimes W_{k,j}$ par des sous-$\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-modules.

Définissons l'espace des *formes modulaires adéliques, quasi-holomorphes, de poids* (k,j) *et profondeur* r par :

$$M^{\mathrm{qh}}_{k,j,r}(\mathbf{C}) = H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{Fil}^{k-r-j}(\mathscr{A}^+ \otimes W_{k,j})).$$

On note simplement $M_{k,j}(\mathbf{C})$ (resp. $M^{\mathrm{qh}}_{k,j}(\mathbf{C})$) l'espace

$$M_{k,j}(\mathbf{C}) = M^{\mathrm{qh}}_{k,j,0}(\mathbf{C}) \quad (\text{resp. } M^{\mathrm{qh}}_{k,j}(\mathbf{C}) = M^{\mathrm{qh}}_{k,j,k}(\mathbf{C}))$$

des *formes modulaires adéliques de poids* (k,j) (resp. des *formes modulaires adéliques quasi-holomorphes de poids* (k,j) *et de profondeur arbitraire*). On note

$$M^{\mathrm{par}}_{k,j}(\mathbf{C}), \quad M^{\mathrm{qh,\,par}}_{k,j}(\mathbf{C}), \quad \cdots$$

les espaces des *formes paraboliques* obtenus en remplaçant $\mathscr{A}^+$ par $\mathscr{A}^+_{\mathrm{par}}$.

Tous ces espaces sont munis d'actions lisses de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

Lemme 5.1. — *Soit $\phi \in M_{k,j}(\mathbf{C})$, non nulle. Si $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \star \phi = \omega(a)\phi$, pour tout $a \in \mathbf{A}^{]\infty[,*}$, alors ω est la restriction à $\mathbf{A}^{]\infty[,*}$ d'un caractère de $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$, dont la restriction à $\mathbf{R}^*$ est $x_\infty \mapsto x_\infty^{k-2j}$, et donc est algébrique, de poids $k-2j$.*

Démonstration. — Si $a \in \mathbf{Q}^*$, alors

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) * \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[} \star \phi\right) = \omega(a^{]\infty[})\phi.$$

Mais on a aussi (le a^{2j-k} vient de l'action sur $\frac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j}$)

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) * \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[} \star \phi\right)(\tau, g^{]\infty[}) =$$
$$a^{2j-k}\phi(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \tau, \left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\right)^{-1} g^{]\infty[} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}) = a^{2j-k}\phi(\tau, g^{]\infty[}).$$

Donc $\omega(a^{]\infty[}) = a^{2j-k}$, et ω est la restriction à $\mathbf{A}^{]\infty[,*}$ du caractère algébrique de $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$ défini par $\omega(x_\infty, x^{]\infty[}) = \omega(x^{]\infty[})x_\infty^{k-2j}$, qui est de poids $k-2j$. □

5.2.3. Lien avec la théorie classique. — Si $\phi \in M_{k,j}(\mathbf{C})$, soit $f_\phi : \mathscr{H}^+ \to \mathbf{C}$ définie par

$$\phi = \phi_0 \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} \quad \text{et} \quad f_\phi(\tau) = \phi_0(\tau, 1^{]\infty[}).$$

Lemme 5.2. — (i) *Soit $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$ et soit $\gamma^{]\infty[}$ l'image de γ dans $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$. Alors on a*

$$f_{\gamma^{]\infty[} \star \phi} = (f_\phi)_{|_{k,j}} \gamma^{-1}.$$

(ii) *Si ϕ est invariante par $\widehat{\Gamma}(N)$, alors $f_\phi \in M_{k,j}^{\mathrm{cl}}(\Gamma(N), \mathbf{C})$. Plus précisément, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star \phi = \omega(d)\,\phi$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \widehat{\Gamma}_0(N)$ alors $f_{|_{k,j}}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \tilde{\omega}^{-1}(d) f_\phi$, pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$.*

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) ; prouvons le (i). Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et donc $\gamma^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. On a $\gamma^{]\infty[} \star \phi = \gamma * (\gamma^{]\infty[} \star \phi)$, et donc

$$\begin{aligned} f_{\gamma^{]\infty[} \star \phi}(\tau) \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} &= (\gamma * (\gamma^{]\infty[} \star \phi))(\tau, 1^{]\infty[}) \\ &= \phi_0(\gamma^{-1} \cdot \tau, (\gamma^{-1})^{]\infty[} 1^{]\infty[} \gamma^{]\infty[}) \otimes \tfrac{(ad-bc)^j}{(-c\tau + a)^k} \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} \\ &= \phi_0(\gamma^{-1} \cdot \tau, 1^{]\infty[}) \otimes \tfrac{(ad-bc)^j}{(-c\tau + a)^k} \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} \\ &= \tfrac{(ad-bc)^j}{(-c\tau + a)^k} f_\phi\left(\tfrac{d\tau - b}{-c\tau + a}\right) \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} \end{aligned}$$

□

Remarque 5.3. — Une autre possibilité pour transformer l'action classique à droite en action à gauche serait de considérer $f_{|k,j}{}^t\gamma$ au lieu de $f_{|k,j}\gamma^{-1}$, ce qui correspond à l'action adélique $(g \star \phi)(x) = \phi(x\,{}^t g^{-1})$. C'est ce que fait Emerton (en fixant j en fonction de k).

Remarque 5.4. — Le lemme 5.2 ci-dessus fabrique une forme modulaire classique à partir d'une forme modulaire adélique. Dans l'autre sens, si $f \in M_{k,j}^{\mathrm{cl}}(\mathbf{C})$ il existe $\phi_f \in M_{k,j}(\mathbf{C})$, unique, telle que

$$\phi_f\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = f(\tau) \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j}, \qquad \text{si } u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*.$$

Par construction ϕ_f est invariante par $\left(\begin{smallmatrix} \widehat{\mathbf{Z}}^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et on a $f_{\phi_f} = f$. Mais, si on supprime la première propriété, on peut multiplier ϕ_f par n'importe quelle fonction de la forme $\alpha \circ \det$, où $\alpha : \mathbf{A}^* \to \mathbf{C}$ prend la valeur 1 en 1 et se factorise à travers $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$ (par exemple un caractère d'ordre fini de $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$).

Remarque 5.5. — Plaçons nous sous l'hypothèse du (ii) du lemme 5.2 et supposons que $(p, N) = 1$, et donc que ϕ est invariante par $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$. Soit T_p l'opérateur

$$T_p = \tfrac{1}{p}\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)_p + \sum_{b=0}^{p-1} \left(\begin{smallmatrix} p & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_p\Big).$$

On déduit du calcul ci-dessus, de l'identité $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)_p = \left(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_p \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)_p$, et de ce que $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)_p$ agit par $\omega_p(p) = \tilde{\omega}^{-1}(p) p^{2(j+1)-(k+2)}$, que l'on a

$$\begin{aligned} T_p \star \phi(\tau, 1^{]\infty[}) &= \tfrac{1}{p}\Big(\tilde{\omega}^{-1}(p) p^{2j-k} p^{-(j-k-1)} f_\phi(p\tau) + \sum_{b=0}^{p-1} p^{j-k-1} f_\phi(\tfrac{\tau - b}{p})\Big) \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} d\tau \\ &= p^{j-k-1}\Big(\tilde{\omega}^{-1}(p) p^{k+1} f_\phi(p\tau) + \tfrac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f_\phi(\tfrac{\tau - b}{p})\Big) \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} d\tau. \end{aligned}$$

Si on suppose que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star \phi = \omega(a)\phi$ au lieu de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star \phi = \omega(d)\phi$, les mêmes calculs nous donnent :

$$T_p \star \phi(\tau, 1^{]\infty[}) = \tilde{\omega}^{-1}(p) p^{j-k-1}\Big(\tilde{\omega}(p) p^{k+1} f_\phi(p\tau) + \tfrac{1}{p}\sum_{b=0}^{p-1} f_\phi(\tfrac{\tau - b}{p})\Big) \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} d\tau$$

5.2.4. q-développement et modèle de Kirillov. — Soit $\phi = \phi_0 \otimes \frac{(\tau e_1 - e_2)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} \in M_{k,j}(\mathbf{C})$. L'invariance de ϕ par $\left(\begin{smallmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$ se traduit par l'équation fonctionnelle

$$\phi_0\big(n\tau, \left(\begin{smallmatrix} nu & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = n^{j-k}\phi_0\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big).$$

Maintenant, ϕ est somme de sa série de Fourier, et il existe des fonctions $u \mapsto a(n, u)$, pour $n \in \mathbf{Q}_+$, telles que l'on ait

$$\phi_0\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = \sum_{n \in \mathbf{Q}_+} a(n, u)\mathbf{e}_\infty(-n\tau).$$

Si $\mathscr{K}(\phi, u) = a(1, u)$, l'équation fonctionnelle ci-dessus se traduit par la relation

$$a(n, u) = n^{k-j}\mathscr{K}(\phi, nu),$$

et donc

$$\phi\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = \big(a(0,u) + \sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*} n^{k-j}\mathscr{K}(\phi, n^{]\infty[}u)\mathbf{e}_\infty(-n\tau)\big) \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}.$$

Lemme 5.6. — *On a*

$$\mathscr{K}\big(\left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[} & b^{]\infty[} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \phi, u\big) = \mathbf{e}^{]\infty[}(b^{]\infty[}u)\mathscr{K}(\phi, a^{]\infty[}u).$$

Démonstration. — Si $n \in \mathbf{Q}$, on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) * \big(\left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[} & b^{]\infty[} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \phi_0\big) = \left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[} & b^{]\infty[} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \phi_0$, et donc

$$\begin{aligned}\big(\left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[} & b^{]\infty[} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \phi_0\big)\big(\tau\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) &= \phi_0\big(\tau - n, \left(\begin{smallmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[} & b^{]\infty[} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) \\ &= \phi_0\big(\tau - n, \left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[}u & b^{]\infty[}u - n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big).\end{aligned}$$

Si on choisit n assez proche de $b^{]\infty[}u$, alors

$$\phi_0\big(\tau - n, \left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[}u & b^{]\infty[}u - n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = \phi_0\big(\tau - n, \left(\begin{smallmatrix} a^{]\infty[}u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big), \quad \mathbf{e}_\infty(-n) = \mathbf{e}^{]\infty[}(n) = \mathbf{e}^{]\infty[}(b^{]\infty[}u).$$

En comparant les développements de Fourier des deux membres, on en déduit le résultat annoncé. □

5.2.5. Questions de rationalité. — On déduit de la rem. 1.1 des identifications naturelles

$$\mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{C}) = \mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*} \times \widehat{\mathbf{Z}}^*, \mathbf{C})^{\widehat{\mathbf{Z}}^*} = \big(\mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}\big)^{\widehat{\mathbf{Z}}^*},$$

où :

• $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ agit sur $\mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*} \times \widehat{\mathbf{Z}}^*, \mathbf{C})$ par $(a\cdot\phi)(x,u) = \phi(a^{-1}x, au)$ et sur $\mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{C}) \otimes \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$ par $(a\cdot(\phi\otimes\alpha))(x) = \phi(a^{-1}x)\otimes\sigma_a(\alpha)$,

• La première flèche $\phi \mapsto \tilde\phi$ est donnée par $\tilde\phi(x,u) = \phi(ux)$ et l'inverse $\phi\otimes\alpha \mapsto \tilde\phi$ de la seconde par $\tilde\phi(x,u) = \sigma_u(\alpha)\phi(x)$.

Si Λ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$, on dit que ϕ *est définie sur* Λ, si $(u \mapsto \mathscr{K}(\phi,u)) \in \mathrm{LC}\big(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \Lambda\otimes\mathbf{Z}^{\mathrm{cycl}}\big)^{\widehat{\mathbf{Z}}^*}$. On note $M_{k,j}(\Lambda)$ le sous-anneau de $M_{k,j}(\mathbf{C})$ des formes définies sur Λ. Par exemple, $\phi \in M_{k,j}(\mathbf{Q})$, si $\mathscr{K}(\phi,u) \in \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$ et si $\sigma_a(\mathscr{K}(\phi,u)) = \mathscr{K}(\phi, au)$, pour tous $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $u \in \mathbf{A}^{]\infty[,*}$.

Remarque 5.7. — L'application $\phi \mapsto f_\phi$ du lemme 5.2 induit un isomorphisme $M_{k,j}(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\sim} M_{k,j}^{\mathrm{cong}}$, l'isomorphisme inverse associe à $f \in M_{k,j}^{\mathrm{cong}}$ l'élément ϕ_f de $M_{k,j}(\mathbf{Q})$ caractérisé par le fait que $\phi_f\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\big) = (\sigma_a(f))(\tau)$, si $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$. On a $f_{g\star\phi} = (f_\phi)_{|_{k,j}}g^{-1}$ pour tout $g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ (cela résulte du lemme 5.2 et de la description de l'action $f_{|_{k,j}}\gamma$, cf. n° 5.1.3).

5.2.6. Torsion par un caractère algébrique

Remarque 5.8. — (i) Si $\eta : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*$ est un caractère continu, d'ordre fini, alors la multiplication par $\eta \circ \det$ induit un isomorphisme $M^{\mathrm{qh}}_{k,j,r}(\mathbf{C}) \cong M^{\mathrm{qh}}_{k,j,r}(\mathbf{C})$, et on a $g \star (\eta \circ \det \cdot \phi) = \eta \circ \det(g) \cdot (\eta \circ \det \cdot \phi)$, si $g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

(ii) Le produit tensoriel par $(\delta_{\mathbf{A}} \circ \det)^a (e_1 \wedge e_2)^a$ induit un isomorphisme $M^{\mathrm{qh}}_{k,j,r}(\mathbf{C}) \cong M^{\mathrm{qh}}_{k,j-a,r}(\mathbf{C})$ car

$$\gamma * (\delta_{\mathbf{A}} \circ \det) = \det \gamma\, (\delta_{\mathbf{A}} \circ \det) \quad \text{et} \quad \gamma * (e_1 \wedge e_2) = (\det \gamma)^{-1} (e_1 \wedge e_2),$$

et, si $g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, on a

$$\begin{aligned}\big(g \star (\phi \otimes (\delta_{\mathbf{A}} \circ \det)^a (e_1 \wedge e_2)^a)\big)(x) &= \delta^a_{\mathbf{A}} \circ \det(g) \cdot (\phi(xg) \otimes (\delta_{\mathbf{A}} \circ \det(x))^a (e_1 \wedge e_2)^a) \\ &= \delta^a_{\mathbf{A}} \circ \det(g) \cdot ((g \star \phi)(\delta_{\mathbf{A}} \circ \det)^a (e_1 \wedge e_2)^a)(x).\end{aligned}$$

(iii) Si $\chi = \eta |\ |^a_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*$ est algébrique de poids a, le produit tensoriel par $(\eta \delta^a_{\mathbf{A}} \circ \det)(e_1 \wedge e_2)^a$ induit un isomorphisme

$$M_{k,j}(\mathbf{C}) \xrightarrow[\sim]{\otimes(\eta\delta^a_{\mathbf{A}} \circ \det)(e_1 \wedge e_2)^a} M_{k,j-a}(\mathbf{C}) \otimes \chi\ ,$$

où l'on note $M \otimes \chi$ le $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-module M avec action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ multipliée par $\chi \circ \det$.

Notons simplement $\phi \mapsto \phi \otimes \chi$ l'application $\phi \mapsto \phi \otimes (\eta \delta^a_{\mathbf{A}} \circ \det)(e_1 \wedge e_2)^a$ ci-dessus.

Lemme 5.9. — (i) *Si L est un sous-corps de $\mathbf{C}$ et si $\chi = \eta |\ |^a_{\mathbf{A}}$ est à valeurs dans L, alors $\phi \mapsto G(\chi^{-1})\phi \otimes \chi$ induit un isomorphisme $M_{k,j}(L) \xrightarrow{\sim} M_{k,j-a}(L) \otimes \chi$ de $G(\mathbf{A}^{]\infty[})$-modules.*

(ii) *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M_{k,j}(L) & \xrightarrow{\otimes G(\chi^{-1})\chi} & M_{k,j-a}(L) \otimes \chi \\ \downarrow{\scriptstyle \mathscr{K}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{K}} \\ \mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, L \otimes \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})^{\widehat{\mathbf{Z}}^*} & \xrightarrow{\times G(\chi^{-1})\chi} & \mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, L \otimes \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})^{\widehat{\mathbf{Z}}^*} \end{array}$$

Démonstration. — On a $\mathscr{K}(\phi \otimes \chi, u) = \chi(u)\mathscr{K}(\phi, u)$, si $u \in \mathbf{A}^{]\infty[,*}$. Si $\phi \in M_{k,j}(L)$ et si χ est à valeurs dans L, on a $\mathscr{K}(\phi \otimes \chi, au) = \eta(a)\sigma_a(\mathscr{K}(\phi \otimes \chi, u))$, si $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$. Comme $\sigma_a(G(\chi^{-1})) = \eta(a) G(\chi^{-1})$, on a

$$G(\chi^{-1})\mathscr{K}(\phi \otimes \chi, au) = \sigma_a(G(\chi^{-1})\mathscr{K}(\phi \otimes \chi, u)),$$

et donc $G(\chi^{-1})\phi \otimes \chi \in M_{k,j}(L)$.

Le lemme s'en déduit. $\square$

5.3. L'application d'Eichler-Shimura

5.3.1. Définition. — Notons $\tau = x + iy$ le paramètre naturel de $\mathscr{H}$ et $d\tau$ la base naturelle de $\Omega^1(\mathscr{H})$ sur $\mathscr{O}(\mathscr{H})$. Si $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, on a des suites exactes, induites par la différentielle $f \mapsto df$ en la place ∞,

$$0 \to \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\mathbf{C}^*, \mathbf{C}) \otimes W_{k,j} \to \mathscr{A}^+ \otimes W_{k,j} \to \mathscr{A}^+ d\tau \otimes W_{k,j} \to 0$$

$$0 \to \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\mathbf{C}^*, \mathbf{C}) \otimes W_{k,j} \to \mathscr{A} \otimes W_{k,j} \to \big(\mathscr{A}^+ d\tau \oplus \mathscr{A}^- d\overline{\tau}\big) \otimes W_{k,j} \to 0$$

Notons qu'une fonction localement constante sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ est constante sur les classes modulo $\mathbf{C}^*$, et donc que $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\mathbf{C}^*, \mathbf{C}) = \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C})$. On appelle *applications d'Eichler-Shimura* les applications ι_{ES} de connexion

$$H^0\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{A}^+ d\tau \otimes W_{k,j}\big) \to H^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C}) \otimes W_{k,j}\big)$$

$$H^0\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \big(\mathscr{A}^+ d\tau \oplus \mathscr{A}^- d\overline{\tau}\big) \otimes W_{k,j}\big) \to H^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C}) \otimes W_{k,j}\big)$$

ainsi que celles obtenues en tensorisant par $W_{k,j}^*(\mathbf{C})$ et en utilisant l'injection $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(\mathbf{C})$-équivariante $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}) \otimes W_{k,j} \otimes W_{k,j}^*(\mathbf{C}) \hookrightarrow \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C})$

$$H^0\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{A}^+ d\tau \otimes W_{k,j}\big) \otimes W_{k,j}^*(\mathbf{C}) \to H^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C})\big)$$

$$H^0\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \big(\mathscr{A}^+ d\tau \oplus \mathscr{A}^- d\overline{\tau}\big) \otimes W_{k,j}\big) \otimes W_{k,j}^*(\mathbf{C}) \to H^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C})\big)$$

Remarque 5.10. — (i) Les deux membres des secondes lignes ont une action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}) \times \mathbb{G}(\mathbf{C})$, l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ étant localement constante (et donc celle de $\mathbb{G}(\mathbf{R}) \subset \mathbb{G}(\mathbf{A})$ se factorise à travers $\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+ \cong \{\pm 1\}$) tandis que celle de $\mathbb{G}(\mathbf{C})$ est algébrique (triviale si on ne tensorise pas par $W_{k,j}^*(\mathbf{C})$) ; le membre de gauche des premières lignes a seulement une action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times \mathbb{G}(\mathbf{C})$. L'application ι_{ES} des secondes lignes est $\mathbb{G}(\mathbf{A}) \times \mathbb{G}(\mathbf{C})$-équivariante (celle des premières est seulement $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times \mathbb{G}(\mathbf{C})$-équivariante).

(ii) L'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}) \times \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \subset \mathbb{G}(\mathbf{A}) \times \mathbb{G}(\mathbf{C})$ sur

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C})) = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q})),$$

stabilise le sous-$\mathbf{Q}$-espace $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}))$.

Maintenant,

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) * d\tau = \tfrac{d}{d\tau}\big(\tfrac{d\tau - b}{-c\tau + a}\big)\, d\tau = \tfrac{ad-bc}{(-c\tau+a)^2}\, d\tau,$$

et donc $d\tau$ se transforme comme $\frac{(\tau e_2 - e_1)^2}{e_1 \wedge e_2}$ sous l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$. En identifiant [18] $d\tau$ à $-\frac{(\tau e_2 - e_1)^2}{e_1 \wedge e_2}$, cela identifie $\mathscr{A}^+ d\tau \otimes W_{k,j}$ à $\mathrm{Fil}^2(\mathscr{A}^+ \otimes W_{k+2,j+1})$. En passant à la

18. L'isomorphisme de Kodaira-Spencer $\omega^2 \cong \Omega^1(\text{log-cusp})$ n'est pas $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-équivariant ; celui qui l'est est $\omega^2 \cong \Omega^1(\text{log-cusp}) \otimes \mathscr{H}_{\mathrm{dR}}^2$. Il envoie $\big(\frac{dt}{t}\big)^2$ sur $\frac{dq}{q} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}^{-1}$. Or on a $\frac{dt}{t} = 2i\pi(\tau e_2 - e_1)$, $\frac{dq}{q} = 2i\pi\, d\tau$ et $\zeta_{\mathrm{dR}}^{-1} = 2i\pi\, \zeta_{\mathrm{B}}^{-1} = -2i\pi\, e_1 \wedge e_2$, et donc $\frac{(\tau e_2 - e_1)^2}{e_1 \wedge e_2} = -d\tau$ (cf. n$^{\mathrm{os}}$ 6.1.4 et 6.2.4 pour les notations).

suite exacte de cohomologie, on obtient une suite exacte

$$M^{\mathrm{qh}}_{k,j}(\mathbf{C}) \xrightarrow{d} M^{\mathrm{qh}}_{k+2,j+1,k}(\mathbf{C}) \longrightarrow H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j}).$$

Par ailleurs, l'inclusion naturelle $M_{k+2,j+1}(\mathbf{C}) \hookrightarrow M^{\mathrm{qh}}_{k+2,j+1,k}(\mathbf{C})$ induit un isomorphisme

$$M_{k+2,j+1}(\mathbf{C}) \cong M^{\mathrm{qh}}_{k+2,j+1,k}(\mathbf{C})/dM^{\mathrm{qh}}_{k,j}(\mathbf{C}).$$

D'où une injection (d'Eichler-Shimura), $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-équivariante,

$$\iota_{\mathrm{ES}} : M_{k+2,j+1}(\mathbf{C}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C}) \otimes W_{k,j}).$$

En faisant la somme sur les couples (k, j), on en déduit une injection

$$\iota_{\mathrm{ES}} : \oplus_{k,j}(M_{k+2,j+1}(\mathbf{C}) \otimes W^*_{k,j}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{C})).$$

5.3.2. Décomposition suivant l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$. — Si $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ est un espace de fonctions sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, stable par translation à droite par $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et par translation à gauche par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, et sur lequel $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+ \subset \mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit trivialement, on note $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\pm}$ le sous-espace de $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ sur lequel $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_\infty$ agit par ± 1. Tout élément γ de $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ s'écrit, de manière unique, $\gamma = \gamma^+ + \gamma^-$, avec $\gamma^{\pm} \in H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\pm}$.

On note $\iota^{\pm}_{\mathrm{ES}}(f)$ l'élément $\iota_{\mathrm{ES}}(f)^{\pm}$. Cela décompose l'application ι_{ES} sous la forme

$$\iota_{\mathrm{ES}} = \iota^+_{\mathrm{ES}} + \iota^-_{\mathrm{ES}}.$$

5.3.3. Torsion par un caractère algébrique. — Comme complément aux résultats du n° 5.2.6, on a la remarque suivante.

Remarque 5.11. — Soit $\chi = \eta|\ |^a_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to \mathbf{C}^*$ algébrique de poids a. Notons $H^1(M)$ le groupe $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M)$ et, si $X = \mathrm{LC}$, $\mathscr{C}$ et $F = \mathbf{C}, L$, notons X_F l'espace $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}), F)$.

(i) On a un diagramme commutatif $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariants :

$$\begin{tikzcd} M_{k+2,j+1}(\mathbf{C}) \arrow[r, "\otimes(\eta\delta^a_{\mathbf{A}}\circ\det)(e_1\wedge e_2)^a"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{ES}}"] & M_{k+2,j-a+1}(\mathbf{C}) \otimes \chi \arrow[d, "\iota_{\mathrm{ES}}"] \\ H^1(\mathrm{LC}_{\mathbf{C}} \otimes W_{k,j}) \arrow[r, "\otimes(\eta\delta^a_{\mathbf{A}}\circ\det)(e_1\wedge e_2)^a"] & H^1(\mathrm{LC}_{\mathbf{C}} \otimes W_{k,j-a}) \otimes \chi \end{tikzcd}$$

(ii) Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on a un diagramme $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-équivariant :

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathrm{LC}_L \otimes W_{k,j}) \otimes W^*_{k,j} \arrow[r, "\otimes(\eta\delta^a_{\mathbf{A}}\circ\det)(e_1\wedge e_2)^a(e_1^*\wedge e_2^*)^a"] \arrow[d] & H^1(\mathrm{LC}_L \otimes W_{k,j-a}) \otimes W^*_{k,j-a} \otimes \chi^{(p)} \arrow[d] \\ H^1(\mathscr{C}_L) \arrow[r, "\times\chi^{(p)}\circ\det"] & H^1(\mathscr{C}_L) \otimes \chi^{(p)} \end{tikzcd}$$

En particulier, si $\chi = |\ |^a_{\mathbf{A}}$, alors $\chi^{(p)}((-1)_\infty, 1^{]\infty[}) = (-1)^a$, et donc les twists du diagramme ci-dessus multiplient l'action de $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_\infty$ par $(-1)^a$.

6. Cohomologie des courbes modulaires

Dans ce chapitre, on passe en revue les différents théorèmes de comparaison pour les formes modulaires et la cohomologie de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$; en particulier, on donne (cf. n° 6.4.3) une description de l'application d'Eichler-Shimura p-adique, cruciale pour la factorisation de la cohomologie complétée du chap. 13.

6.1. L'espace $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}))$

6.1.1. Espaces de modules. — Soit $g=(g_\infty,g^{]\infty[})\in\mathbb{G}(\mathbf{A})$. Si $g_\infty=\left(\begin{smallmatrix}a_\infty & b_\infty\\ c_\infty & d_\infty\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{G}(\mathbf{R})$, notons $\left(\begin{smallmatrix}\omega_1(g)\\ \omega_2(g)\end{smallmatrix}\right)$ le vecteur $g_\infty\cdot\left(\begin{smallmatrix}i\\ 1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a_\infty i+b_\infty\\ c_\infty i+d_\infty\end{smallmatrix}\right)\in\mathbf{C}^2$, et $V(g)$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace de $\mathbf{C}$ engendré par $\omega_1(g),\omega_2(g)$. Alors $\mathbf{R}\otimes V(g)\to\mathbf{C}$ est un isomorphisme, et $g^{]\infty[}$ fournit une base $\lambda_{g,1},\lambda_{g,2}$ du $\mathbf{A}^{]\infty[}$-module $\mathrm{Hom}(V(g),\mathbf{A}^{]\infty[})$ par la formule $g^{]\infty[}=\left(\begin{smallmatrix}\lambda_{g,1}(\omega_1(g)) & \lambda_{g,2}(\omega_1(g))\\ \lambda_{g,1}(\omega_2(g)) & \lambda_{g,2}(\omega_2(g))\end{smallmatrix}\right)$.

Si $\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, alors $\omega_1(\gamma g),\omega_2(\gamma g)$ est une base de $V(g)$, et $\lambda_{\gamma g,j}=\lambda_{g,j}$, si $j=1,2$. On en déduit une bijection naturelle :

$$\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A})\longleftrightarrow\{V\subset\mathbf{C},\ \mathbf{R}\otimes V\xrightarrow{\sim}\mathbf{C}+\text{base }(\lambda_1,\lambda_2)\text{ de }\mathrm{Hom}(V,\mathbf{A}^{]\infty[})\}.$$

Maintenant, si (V,λ_1,λ_2) est un élément du membre de droite, on peut lui associer $(V^+,\lambda_1,\lambda_2)$, où $V^+\subset V$ est l'ensemble des v tels que $\lambda_1(v),\lambda_2(v)\in\widehat{\mathbf{Z}}$. Alors V^+ est un $\mathbf{Z}$-réseau de V (et donc un réseau de $\mathbf{C}$) et (λ_1,λ_2) est une base du $\widehat{\mathbf{Z}}$-module $\mathrm{Hom}(V^+,\widehat{\mathbf{Z}})$. On en déduit des bijections naturelles

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\sim} & \{V\subset\mathbf{C},\ \mathbf{R}\otimes V\xrightarrow{\sim}\mathbf{C}+\text{base }(\lambda_1,\lambda_2)\text{ de }\mathrm{Hom}(V,\mathbf{A}^{]\infty[})\}\\ \big\downarrow\wr & & \big\downarrow\wr\\ \mathbb{G}(\mathbf{Z})\backslash(\mathbb{G}(\mathbf{R})\times\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) & \xrightarrow{\sim} & \{\Lambda\text{ réseau de }\mathbf{C}+\text{base }(\lambda_1,\lambda_2)\text{ de }\mathrm{Hom}(\Lambda,\widehat{\mathbf{Z}})\}\end{array}$$

Ceci fournit un isomorphisme d'espaces analytiques

$$\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}))\cong\mathbb{G}(\mathbf{Z})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})),$$

qui explique pourquoi la cohomologie de $\mathbb{G}(\mathbf{Z})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ est naturellement munie d'une action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et pas seulement de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$.

Remarque 6.1. — Se donner une base (λ_1,λ_2) de $\mathrm{Hom}(V,\mathbf{A}^{]\infty[})$ est équivalent à se donner une base de $\widehat{\mathbf{Z}}\otimes V^+$ (prendre la base duale).

6.1.2. Quotients de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}))$. — Si K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, soit

$$Y(K)(\mathbf{C}):=\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}))/K=\mathbb{G}(\mathbf{Z})\backslash(\mathscr{H}\times\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))/K.$$

C'est une surface de Riemann non compacte dont l'ensemble des composantes connexes est $\widehat{\mathbf{Z}}^*/\det K$.

Si $K = \widehat{\Gamma}(N)$, on note simplement $Y(N)(\mathbf{C})$ la surface de Riemann $Y(K)(\mathbf{C})$. On a un isomorphisme de surfaces de Riemann (on note encore a un relèvement arbitraire de $a \in (\mathbf{Z}/N)^*$ dans $\mathbf{Z}$) :

$$(\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+) \times (\mathbf{Z}/N)^* \xrightarrow{\sim} Y(N)(\mathbf{C}), \quad (\tau, a) \mapsto (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\tau), \tfrac{a}{N}, \tfrac{\tau}{N}).$$

Par ailleurs, on a des isomorphismes de surfaces de Riemann (on note encore a un relèvement arbitraire de $a \in (\mathbf{Z}/N)^*$ dans $\widehat{\mathbf{Z}}^*$)

$$(\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+) \times (\mathbf{Z}/N)^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash(\mathscr{H} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}))/\widehat{\Gamma}(N), \quad (\tau, a) \mapsto \big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big),$$
$$(\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+) \times (\mathbf{Z}/N)^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A})/(\mathbf{C}^* \times \widehat{\Gamma}(N)), \quad (x+iy, a) \mapsto \big(\left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big)$$

Le groupe $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ agit sur la limite projective $\varprojlim_K Y(K)(\mathbf{C})$, pour K décrivant les sous-groupes ouverts compacts de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ (la conjugaison par un élément de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ est un automorphisme du système des sous-groupes compacts de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$), et donc aussi sur sa cohomologie (qui, par définition, est la limite inductive des cohomologies de $Y(K)(\mathbf{C})$).

6.1.3. Systèmes locaux. — La représentation $W_{k,j}$ du n° 4.2.1 définit un système local $W_{k,j}^{\mathrm{B}}$ sur $Y(K)(\mathbf{C})$ (le B est l'initiale de Betti). La cohomologie de ce système local est reliée à la cohomologie de $\Gamma(1) \cap K$, et peut s'exprimer en termes de celle de $\Gamma(1)$ via le lemme de Shapiro :

$$H^i(Y(K)(\mathbf{C}), W_{k,j}^{\mathrm{B}}) = H^i(\Gamma(1), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K, \mathbf{Z}) \otimes W_{k,j}).$$

En passant à la limite sur K, on obtient des isomorphismes

$$\begin{aligned}\varinjlim H^i(Y(K)(\mathbf{C}), W_{k,j}^{\mathrm{B}}) &= H^i(\Gamma(1), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z}) \otimes W_{k,j}) \\ &= H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Z}) \otimes W_{k,j}),\end{aligned}$$

le second isomorphisme résultant de ce que $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Z}) = \mathrm{Ind}_{\Gamma(1)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z})$. On a les mêmes résultats pour les cohomologies H_c^i (à support compact) et H_{par}^1 (parabolique).

Tensoriser $W_{k,j}$ par le faisceau structural produit un fibré vectoriel $W_{k,j}^{\mathrm{dR}}$ muni de la connexion ∇ induite par la différentielle $d : \mathscr{O} \to \Omega^1$ sur le faisceau structural. Les formes modulaires quasi-holomorphes adéliques de poids (k, j) s'identifient aux sections globales, i.e. $\varinjlim H^0(Y(K)(\mathbf{C}), W_{k,j}^{\mathrm{dR}})$, qui sont à croissance lente à l'infini. Le théorème de comparaison Betti-de Rham fournit, si $\sharp \in \{\ , c, \mathrm{par}\}$, un isomorphisme :

$$\varinjlim H^i_{\mathrm{dR}\sharp}(Y(K)(\mathbf{C}), W_{k,j}^{\mathrm{dR}}) \cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} \varinjlim H^i_{\mathrm{B}\sharp}(Y(K)(\mathbf{C}), W_{k,j}^{\mathrm{B}}).$$

6.1.4. Interprétation géométrique. — Si Γ est un sous-groupe de congruence de $\Gamma(1)$, soit Γ' le produit semi-direct de Γ par $\mathbf{Z}^2$ des matrices

$$\gamma' = \left(\begin{smallmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ u & v & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \text{ et } (u, v) \in \mathbf{Z}^2.$$

On fait agir γ' sur $\mathscr{H}\times\mathbf{C}$ par $\gamma'\cdot(\tau,z)=\big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z+u\tau+v}{c\tau+d}\big)$. Alors $\Gamma'\backslash(\mathscr{H}\times\mathbf{C})$ se surjecte sur $\Gamma\backslash\mathscr{H}$ via $(\tau,z)\mapsto\tau$ et la fibre en τ est le tore complexe $E_\tau=\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\tau)$. Le système local $(W^*_{1,0})^{\mathrm{B}}$ est l'homologie $H_1(E_\tau,\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\tau$; les éléments e_1^* et e_2^* correspondent respectivement à -1 et τ. Si $\gamma=\big(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\big)\in\Gamma$, l'action de la monodromie correspondant à γ sur v se calcule en suivant v le long d'un chemin reliant τ à $\gamma^{-1}\cdot\tau$ (le groupe fondamental agit naturellement à droite, et pour transformer notre action à gauche en action à droite, il faut faire agir γ par γ^{-1}). La base $(e_1^*,e_2^*)=(-1,\tau)$ se transforme en $\big(-1,\frac{d\tau-b}{-c\tau+a}\big)\sim(c\tau-a,d\tau-b)=(ae_1^*+ce_2^*,be_1^*+de_2^*)$, ce qui est effectivement l'action sur $W^*_{1,0}$.

Le système local $W^{\mathrm{B}}_{1,0}$ est donc la cohomologie de Betti de la famille des E_τ ; le fibré $U\mapsto W^{\mathrm{dR}}_{1,0}(U)=\mathscr{O}(U)\otimes W_{1,0}$ en est la cohomologie de de Rham ; la connexion $\nabla=d\otimes 1$ ci-dessus est la connexion de Gauss-Manin. Les $W^{\mathrm{B}}_{k,j}$ et $W^{\mathrm{dR}}_{k,j}$ s'obtiennent à partir de $W^{\mathrm{B}}_{1,0}$ et $W^{\mathrm{dR}}_{1,0}$ par des opérations tensorielles. La forme τe_2-e_1 est la forme dz sur E_τ (ces deux formes prennent les mêmes valeurs sur e_1^* et e_2^*, à savoir -1 et τ).

Il est d'usage de poser

$$t=e^{2i\pi\,z},\quad q=e^{2i\pi\,\tau}.$$

On a un isomorphisme (induit par $z\mapsto t$) et des identifications

$$E_\tau=\mathbf{C}/(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\tau)\cong\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}},\quad \tfrac{dt}{t}=2i\pi\,dz=2i\pi(\tau e_2-e_1),\quad \tfrac{dq}{q}=2i\pi\,d\tau.$$

6.2. Les courbes modulaires

6.2.1. Espaces de modules de courbes elliptiques. — Si K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, on note $X(K)(\mathbf{C})$ la compactifiée (lisse) de $Y(K)(\mathbf{C})$ obtenue en rajoutant à $Y(K)(\mathbf{C})$ des « pointes ». Alors $X(K)(\mathbf{C})$ est l'ensemble des $\mathbf{C}$-points d'une courbe algébrique $X(K)$ qui admet un modèle connexe (mais pas géométriquement connexe) sur $\mathbf{Q}$. On note $X(K)^\times$ la courbe $X(K)$ avec une structure logarithmique aux pointes.

Si $N\geq 1$, on note simplement $X(N)$ la courbe $X(\widehat{\Gamma}(N))$, compactifiée de $Y(N)$. Alors $Y(N)$ paramètre les triplets (E,e_1,e_2) à isomorphisme près, où E est une courbe elliptique, et (e_1,e_2) une base sur $\mathbf{Z}/N$ du sous-groupe $E[N]$ de N-torsion de E. La courbe $Y(N)$ est définie sur $\mathbf{Q}$, mais n'est pas géométriquement connexe : le corps des constantes de $\mathscr{O}(Y(N))$ est $\mathbf{Q}(\zeta_N)$, et les composantes connexes de $Y(N)_{\mathbf{Q}(\zeta_N)}$ sont en bijection avec l'ensemble $\boldsymbol{\mu}_N^*$ des racines primitives N-ièmes de l'unité (si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_N^*$, la composante correspondant à η paramètre les triplets (E,e_1,e_2) comme ci-dessus tels que l'accouplement de Weil $\langle e_1,e_2\rangle$ de e_1 et e_2 soit égal à η). On identifie $\boldsymbol{\mu}_N^*$ à $(\mathbf{Z}/N)^*$ en envoyant $a\in(\mathbf{Z}/N)^*$ sur $\zeta_N^a=e^{2i\pi\,a/N}$.

On note ∞_a la pointe à l'infini de $(\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+)\times\{a\}\subset Y(N)(\mathbf{C})$ (cf. n° 6.1.2). C'est un point de $X(N)(\mathbf{Q}(\zeta_N))$, et si $u\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $\sigma_u\in\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q})$ est l'image inverse de u par le caractère cyclotomique, alors $\sigma_u(\infty_a)=\infty_{ua}$.

6.2.2. Le voisinage p-adique de la pointe ∞. — Soit $C = \mathbf{C}_p$ (ou, plus généralement, un corps algébriquement clos, complet pour v_p). Soit $Z(1)_C \subset X(1)_C$ le lieu paramétrant les courbes elliptiques à réduction multiplicative (i.e. $v_p(j) < 0$). C'est une boule ouverte unité (de paramètre $\frac{1}{j}$ ou q).

Si $N \geq 1$, notons $\pi_N : X(N) \to X(1)$ l'application naturelle, et $Z(N)_C$ la composante connexe de $\pi_N^{-1}(Z(1)_C)$ stable par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}/N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subset \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N)$. Alors $Z(N)_C$ est une boule ouverte de paramètre local $q^{1/N}$ et $\pi_N^* : \mathscr{O}^+(Z(1)_C) \subset \mathscr{O}^+(Z(N)_C)$ est l'inclusion $\mathscr{O}_C[[q]] \hookrightarrow \mathscr{O}_C[[q^{1/N}]]$.

Enfin, on note $Z(0)_C$ la limite projective des $Z(N)_C$.

6.2.3. Systèmes locaux. — Les faisceaux du n° 6.1.4 ont des avatars algébriques : le tore E_τ est l'ensemble des $\mathbf{C}$-points d'une courbe elliptique, et les courbes $Y(K)$ paramètrent des courbes elliptiques avec structure de niveau. La cohomologie de la courbe elliptique universelle au-dessus de $Y(K)$ fournit donc des faisceaux $\mathscr{H}^i_{\mathrm{truc}}$ sur $Y(K)$ ou son analytifiée.

Posons $F^{\mathrm{B}} = \mathbf{Q}$, $F^{\mathrm{dR}} = \mathbf{Q}$ et $F^{\mathrm{ét}} = \mathbf{Q}_p$ (avec B = Betti, dR = de Rham, ét = étale). Si truc $\in \{\mathrm{B}, \mathrm{dR}, \mathrm{ét}\}$ et si $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, on note $W^{\mathrm{truc}}_{k,j}$ le F^{truc}-faisceau

$$W^{\mathrm{truc}}_{k,j} = \mathrm{Sym}^k \mathscr{H}^1_{\mathrm{truc}} \otimes (\mathscr{H}^2_{\mathrm{truc}})^{-j}.$$

Notons que $\mathscr{H}^2_{\mathrm{truc}} = \det \mathscr{H}^1_{\mathrm{truc}}$ est le twist de Tate (-1) dans chacune des cohomologies considérées et que l'on a $(\mathscr{H}^1_{\mathrm{truc}})^* \cong \mathscr{H}^1_{\mathrm{truc}} \otimes (\mathscr{H}^2_{\mathrm{truc}})^{-1}$. On en déduit un isomorphisme

$$(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})^* \cong W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j}.$$

Le fibré $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}$ admet comme sous-fibré de rang 1, le fibré ω (des formes différentielles holomorphes sur la courbe elliptique universelle), et donc une filtration

$$\mathrm{Fil}^0 \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}} = \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}, \quad \mathrm{Fil}^1 \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}} = \omega, \quad \mathrm{Fil}^2 \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}} = 0.$$

Comme $\mathscr{H}^2_{\mathrm{dR}} = \wedge^2 \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}$, le fibré $\mathscr{H}^2_{\mathrm{dR}}$ est muni de la filtration

$$\mathrm{Fil}^1 \mathscr{H}^2_{\mathrm{dR}} = \mathscr{H}^2_{\mathrm{dR}}, \quad \mathrm{Fil}^2 \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}} = 0,$$

et les fibrés $W^{\mathrm{dR}}_{k,j}$ sont munis de la filtration obtenue par produit tensoriel :

$$\mathrm{Fil}^{k-j-r} W^{\mathrm{dR}}_{k,j} = \mathrm{Fil}^{k-r} W^{\mathrm{dR}}_{k,0}, \quad \mathrm{Fil}^{k-r} W^{\mathrm{dR}}_{k,0} = \omega^{k-r} \otimes \mathrm{Sym}^r \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}.$$

6.2.4. Le motif $\mathbf{Q}(i)$ *et ses réalisations.* — Soit $\mathbf{Q}(1)$ le motif de Tate. On note $\mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}}$, $\mathbf{Q}_p(1)$ et $\mathbf{Q}(1)_{\mathrm{dR}}$ ses réalisations de Betti, étale p-adique, et de de Rham. Alors $\mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}}$ et $\mathbf{Q}(1)_{\mathrm{dR}}$ sont des $\mathbf{Q}$-espaces de dimension 1, admettant des bases naturelles ζ_{B} et ζ_{dR}. On a des isomorphismes de comparaison :

$$\mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}} \cong \mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{dR}}, \quad \mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}} \cong \mathbf{Q}_p(1), \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}} \cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{dR}}$$

et, via ces isomorphismes, ζ_{B} et ζ_{dR} sont reliés par :

$$1 \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = 2i\pi \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} \text{ (dans } \mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}}), \quad 1 \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = t \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} \text{ (dans } \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathbf{Q}(1)_{\mathrm{B}}).$$

On note encore ζ_{B} (ou $\zeta_{\text{ét}}$) l'élément $1\otimes\zeta_{\mathrm{B}}$ de $\mathbf{Q}_p(1)$; on a donc $\sigma(\zeta_{\mathrm{B}})=\boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma)\zeta_{\mathrm{B}}$, si $\sigma\in G_{\mathbf{Q}}$.

Plus généralement, si $i\geq 0$, on note $\mathbf{Q}(i)$ la puissance tensorielle i-ième de $\mathbf{Q}(1)$ et, si $i\leq 0$, on note $\mathbf{Q}(i)$ le dual de $\mathbf{Q}(-i)$. Alors $\mathbf{Q}(i)_{\mathrm{B}}$ et $\mathbf{Q}(i)_{\mathrm{dR}}$ sont des $\mathbf{Q}$-espaces de dimension 1 admettant ζ_{B}^i et ζ_{dR}^i comme base.

Notons que e_1^*, e_2^* est une base anti-orientée du H_1 de la courbe elliptique universelle, et donc que

$$e_1^*\wedge e_2^*=-\zeta_{\mathrm{B}}\quad\text{et}\quad e_1\wedge e_2=-\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{gathered}\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\tau=-\tfrac{(\tau e_2-e_1)^{k+2}}{(e_1\wedge e_2)^{j+1}}=(-1)^j\zeta_{\mathrm{B}}^{j+1}(dz)^{k+2}\\ (-2i\pi)^{k+1-j}\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\tau=(-1)^{k+1}((2i\pi)^{-1}\zeta_{\mathrm{B}})^{j+1}(2i\pi\, dz)^{k+2}=(-1)^{k+1}\zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1}(\tfrac{dt}{t})^{k+2}\end{gathered}$$

6.2.5. Cohomologie. — Si truc $\in\{\mathrm{B},\mathrm{dR},\text{ét}\}$, on note $H^\bullet_{\mathrm{truc}}$ la cohomologie correspondante (la cohomologie étale est la géométrique, i.e. celle des $X(K)^\times\times\overline{\mathbf{Q}}$, la structure logarithmique a pour effet de permettre les revêtements profinis ramifiés en les pointes : ce qu'on obtient est souvent appelé *cohomologie log-Kummer-(pro)étale*), $H^\bullet_{\mathrm{truc},c}$ la cohomologie à support compact et $H^\bullet_{\mathrm{truc,\,par}}$ la cohomologie parabolique (i.e. l'image de $H^\bullet_{\mathrm{truc},c}\to H^\bullet_{\mathrm{truc}}$). Alors $H^1_{\mathrm{truc,\,par}}$ est naturellement un quotient de $H^1_{\mathrm{truc},c}$, mais le principe de Manin-Drinfeld fournit un scindage naturel, ce qui permet de considérer $H^1_{\mathrm{truc,\,par}}$ comme un sous-objet de $H^1_{\mathrm{truc},c}$.

Les $H^1_{\mathrm{dR}\sharp}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})$, pour $\sharp\in\{\ ,c,\mathrm{par}\}$, sont munis d'une filtration induite par celle de $W_{k,j}^{\mathrm{dR}}$ dont le gradué associé n'a que deux termes non nuls $H^{1,0}_{\mathrm{dR}\sharp}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})$ (sous-objet de $H^1_{\mathrm{dR}\sharp}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})$) et $H^{0,1}_{\mathrm{dR}\sharp}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})$ (le quotient).

La théorie de Hodge fournit une décomposition (où $w_\infty=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty$ et $H_{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}}H$)

$$H^1_{\mathrm{dR,\,par}}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_{\mathbf{C}}=H^{1,0}_{\mathrm{dR,\,par}}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_{\mathbf{C}}\oplus H^{0,1}_{\mathrm{dR,\,par}}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_{\mathbf{C}},$$

les représentants harmoniques étant $M_{k+2,j+1}^{\mathrm{par}}(K,\mathbf{C})$ pour $H^{1,0}$ et $w_\infty\star M_{k+2,j+1}^{\mathrm{par}}(K,\mathbf{C})$ pour $H^{0,1}$. On a aussi $\mathbf{C}\otimes H^{1,0}_{\mathrm{dR}}(X(K)^\times,W_{k,j}^{\mathrm{dR}})=M_{k+2,j+1}(K,\mathbf{C})$.

On a un diagramme commutatif d'isomorphismes de comparaison (entre les lignes 1 et 2, il s'agit de la comparaison entre cohomologies de Betti et de de Rham combinée avec la comparaison entre cohomologie de de Rham algébrique et cohomologie de de Rham classique, entre les lignes 2 et 3, c'est la théorie de Hodge (et l'existence de représentants harmoniques), entre les 3 et 4, c'est l'isomorphisme d'Eichler-Shimura, entre les 4 et 1, c'est la comparaison entre la cohomologie du groupe fondamental et celle des systèmes locaux) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} H^1_{\mathrm{B,par}}(X(K)^\times(\mathbf{C}), W^{\mathrm{B}}_{k,j}) \arrow[d, shift left=2, "\iota^{\mathrm{dR}}_{\mathrm{B}}"] \\
\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} H^1_{\mathrm{dR,par}}(X(K)^\times, W^{\mathrm{dR}}_{k,j}) \arrow[u, shift left=2, "\iota^{\mathrm{B}}_{\mathrm{dR}}"] \arrow[d, shift left=2, "\iota^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}}"] \\
M^{\mathrm{par}}_{k+2,j+1}(K,\mathbf{C}) \oplus \big(w_\infty \star M^{\mathrm{par}}_{k+2,j+1}(K,\mathbf{C})\big) \arrow[u, shift left=2, "\iota^{\mathrm{dR}}_{\mathrm{H}}"] \arrow[d, "\iota_{\mathrm{ES}}"] \\
\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma(1), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K, W_{k,j})) \arrow[uuu, bend right=60]
\end{tikzcd}$$

6.2.6. Dualité. — On dispose d'une application trace

$$\mathrm{Tr} : H^2_{\mathrm{truc},c}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{0,0}) \to F^{\mathrm{truc}} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{truc}}$$

et, si $K \subset K'$, d'un diagramme commutatif (qui se déduit du diagramme analogue pour les H^0) :

$$\begin{tikzcd}
H^2_{\mathrm{truc},c}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{0,0}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[d, shift left, "\mathrm{cor}"] & F^{\mathrm{truc}} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{truc}} \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}"] \\
H^2_{\mathrm{truc},c}(X(K')^\times, W^{\mathrm{truc}}_{0,0}) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] \arrow[u, shift left, "\mathrm{res}"] & F^{\mathrm{truc}} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{truc}} \arrow[u, shift left, "{[K':K]}"]
\end{tikzcd}$$

En composant le cup-produit avec la projection naturelle $W_{k,k-j} \otimes W_{k,j} \to W_{0,0}$ puis avec l'application trace ci-dessus, cela fournit des dualités :

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{truc},K} : H^1_{\mathrm{truc}}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j}) \times H^1_{\mathrm{truc},c}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,j}) \to F^{\mathrm{truc}} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{truc}}$$
$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{truc},K} : H^1_{\mathrm{truc,\,par}}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j}) \times H^1_{\mathrm{truc,\,par}}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,j}) \to F^{\mathrm{truc}} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{truc}}$$

De plus, on a

$$\langle \mu_K, \mathrm{res}(\phi_{K'})\rangle_{\mathrm{truc},K} = \langle \mathrm{cor}(\mu_K), \phi_{K'}\rangle_{\mathrm{truc},K'} \tag{6.2}$$

pour tous $\mu_K \in H^1_{\mathrm{truc}}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})$ et $\phi_{K'} \in H^1_{\mathrm{truc},c}(X(K')^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,j})$.

6.2.7. Compatibilité des accouplements de dualité. — Soit $N \geq 1$. On dispose d'accouplements :

$$\langle\ ,\ \rangle : H^1(\Gamma(1), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), W_{k,k-j})) \times H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma(1), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N), W_{k,j})) \to \mathbf{Q}$$
$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{B}} : H^1_{\mathrm{B}}(Y(N)(\mathbf{C}), W^{\mathrm{B}}_{k,k-j}) \times H^1_{\mathrm{B,par}}(Y(N)(\mathbf{C}), W^{\mathrm{B}}_{k,j}) \to \mathbf{Q} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{B}}$$
$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}} : H^1_{\mathrm{dR}}(X(N)^\times, W^{\mathrm{dR}}_{k,k-j}) \times H^1_{\mathrm{dR,par}}(X(N)^\times, W^{\mathrm{dR}}_{k,j}) \to \mathbf{Q} \otimes \zeta^{-1}_{\mathrm{dR}}$$
$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{H}} : \big(M_{\blacksquare}(N) \oplus w_\infty \star M^{\mathrm{par}}_{\blacksquare}(N)\big) \times \big(M^{\mathrm{par}}_{\square}(N) \oplus w_\infty \star M^{\mathrm{par}}_{\square}(N)\big) \to \mathbf{C}$$
$$\blacksquare = k+2, k+1-j, \quad \square = k+2, j+1$$

Les accouplements $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{B}}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ sont obtenus via H^2_c ; l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ est celui du § 4.4, et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{H}}$ est obtenu en évaluant le cup-produit des deux formes différentielles le long de la classe fondamentale de $H^2_{\mathrm{B},c}$, i.e.

$$\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\mathrm{H}} = \int_{Y(N)(\mathbf{C})}\phi_1\wedge\phi_2$$

(Quand on développe $\frac{(\overline{\tau}e_1-e_2)^k}{(e_1\wedge e_2)^{k-j}}d\overline{\tau}\wedge\frac{(\tau e_1-e_2)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\tau$ et les expressions analogues échangeant les rôles de τ et $\overline{\tau}$, on voit apparaître la forme $y^k dxdy$ habituelle intervenant dans le produit scalaire de Petersson.)

Ces accouplements se correspondent (après extension des scalaires à $\mathbf{C}$) via les isomorphismes de comparaison (et l'identité $\zeta_{\mathrm{B}} = 2i\pi\,\zeta_{\mathrm{dR}}$) :

$$\begin{aligned}
\langle\iota_{\mathrm{ES}}(\phi_1),\iota_{\mathrm{ES}}(\phi_2)\rangle &= \langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\mathrm{H}}\\
\langle\iota^{\mathrm{B}}_{\mathrm{dR}}(\phi_1),\iota^{\mathrm{B}}_{\mathrm{dR}}(\phi_2)\rangle_{\mathrm{B}}\otimes\zeta_{\mathrm{B}} &= 2i\pi\,\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\mathrm{dR}}\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}\\
\langle\iota^{\mathrm{dR}}_{\mathrm{H}}(\phi_1),\iota^{\mathrm{dR}}_{\mathrm{H}}(\phi_2)\rangle_{\mathrm{dR}}\otimes\zeta_{\mathrm{dR}} &= \tfrac{1}{2i\pi}\langle\phi_1,\phi_2\rangle_{\mathrm{H}}
\end{aligned}\tag{6.3}$$

On en déduit la formule explicite suivante.

Lemme 6.4. — *Soient $\Phi_1\in H^1_{\mathrm{dR,par}}(X(N)^\times,W^{\mathrm{dR}}_{k,j})$ et $\Phi_2\in H^1_{\mathrm{dR}}(X(N)^\times,W^{\mathrm{dR}}_{k,k-j})$, et soient $\Phi_1^{\mathrm{Har}}=\iota^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}}(\Phi_1)$ et $\Phi_2^{\mathrm{Har}}=\iota^{\mathrm{H}}_{\mathrm{dR}}(\Phi_2)$ les représentants harmoniques de Φ_1 et Φ_2. Alors*

$$\begin{aligned}
\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle_{\mathrm{dR},Y(N)}\otimes\zeta_{\mathrm{dR}} &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_{Y(N)(\mathbf{C})}\Phi_1^{\mathrm{Har}}\wedge\Phi_2^{\mathrm{Har}}\\
&= \tfrac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/N)^*}(\Phi_1^{\mathrm{Har}}\wedge\Phi_2^{\mathrm{Har}})(\tau,\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[})\\
&= \tfrac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+}\sum_{a\in(\mathbf{Z}/N)^*}\Big(\big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\Phi_1^{\mathrm{Har}}\big)\wedge\big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\Phi_2^{\mathrm{Har}}\big)\Big)(\tau,1^{]\infty[})
\end{aligned}$$

6.3. Cohomologie de la tour des courbes modulaires

Si truc $\in\{\mathrm{B},\mathrm{dR},\mathrm{ét}\}$, et si $\sharp\in\{\ ,c,\mathrm{par}\}$, posons :

$$\begin{aligned}
\underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j}) &:= \varprojlim_K H^1_{\mathrm{truc}\sharp}(X(K)^\times,W^{\mathrm{truc}}_{k,j}),\\
\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j}) &:= \varinjlim_K H^1_{\mathrm{truc}\sharp}(X(K)^\times,W^{\mathrm{truc}}_{k,j}),
\end{aligned}$$

où K parcourt les sous-groupes ouverts compacts de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ (on peut se contenter des $\widehat{\Gamma}(N)$ puisque ceux-ci forment un système cofinal) ; les flèches de transition sont les corestrictions pour $\underleftarrow{H}$ et les restrictions pour $\underrightarrow{H}$.

De même, si S est un ensemble fini de nombres premiers, on pose

$$\begin{aligned}
\underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})_S &:= \varprojlim_K H^1_{\mathrm{truc}\sharp}(X(K)^\times,W^{\mathrm{truc}}_{k,j}),\\
\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})_S &:= \varinjlim_K H^1_{\mathrm{truc}\sharp}(X(K)^\times,W^{\mathrm{truc}}_{k,j}),
\end{aligned}$$

où K parcourt les sous-groupes ouverts compacts de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$.

Les $\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})$ et les $\underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})$ (resp. les $\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})_S$ et les $\underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc}\sharp}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})_S$) sont munis d'actions de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ (resp. de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$), lisses pour les $\underrightarrow{H}^1$.

6.3.1. Comparaison avec la cohomologie de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$. — On a des isomorphismes commutant aux actions de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, pour $\sharp \in \{\ ,c,\mathrm{par}\}$ et $\star \in \{\ ,S\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{B}\sharp}(W^{\mathrm{B}}_{k,j})_\star &\cong \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{ét}\sharp}(W^{\mathrm{ét}}_{k,j})_\star,\\
\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{B}\sharp}(W^{\mathrm{B}}_{k,j})_\star &\cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}\sharp}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})_\star,\\
\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{B}\sharp}(W^{\mathrm{B}}_{k,j})_\star &\cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}\sharp}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})_\star.
\end{aligned}$$

Et de même pour $\underleftarrow{H}^1$. Pour mémoire, rappelons les isomorphismes déjà mentionnés.

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{B}\sharp}(W^{\mathrm{B}}_{k,j}) &\cong H^1_\sharp(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Q}) \otimes W_{k,j}),\\
\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{B}\sharp}(W^{\mathrm{B}}_{k,j})_S &\cong H^1_\sharp(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\tfrac{1}{S}]), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Q}) \otimes W_{k,j}).
\end{aligned}$$

6.3.2. Dualité. — La formule (6.2) montre que l'accouplement passe à la limite : si

$$\begin{aligned}
\mu = (\mu_K)_K &\in \varprojlim H^1_{\mathrm{truc}}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})\\
\phi = (\phi_K)_K &\in \varinjlim H^1_{\mathrm{truc},c}(X(K)^\times, W^{\mathrm{truc}}_{k,j})
\end{aligned}$$

on pose

$$\langle \mu,\phi\rangle_{\mathrm{truc}} := \lim_K \langle \mu_K,\phi_K\rangle_{\mathrm{truc},K} \tag{6.5}$$

(la suite est en fait stationnaire pour K assez petit, et il suffit de prendre K de la forme $\widehat{\Gamma}(N)$). L'accouplement

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{truc}} : \underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})_\star \times \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc},c}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})_\star \to F^{\mathrm{truc}} \otimes \zeta_{\mathrm{truc}}^{-1}$$

ainsi défini commute aux actions de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ ou $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ (agissant trivialement sur ζ_{truc}), et est une dualité si $\star \in \{\ ,S\}$.

Il en est de même de sa restriction à $\underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})_\star \times \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})_\star$.

6.3.3. Formes modulaires quasi-holomorphes géométriques. — Soit

$$\omega^{k,j} = \omega^k \otimes (\mathscr{H}^2_{\mathrm{dR}})^{-j}.$$

C'est un fibré en droites engendré, localement pour la topologie analytique, par $\zeta^j_{\mathrm{dR}}(\frac{dt}{t})^k = (-1)^j(2i\pi)^{k-j}\frac{(dz)^k}{(e_1\wedge e_2)^j} = (-1)^j(2i\pi)^{k-j}\frac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}$. Posons

$$\underrightarrow{H}^0(\omega^{k,j}) = \varinjlim H^0(X(K)^\times,\omega^{k,j}) = \varinjlim H^0(X(N)^\times,\omega^{k,j}),$$

où K décrit les sous-groupes ouverts compacts de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et N les entiers ≥ 1. On a (en notant $\mathscr{O}^{\mathrm{temp}}(\mathscr{H}^+)$ les fonctions holomorphes sur $\mathscr{H}^+$, à croissance lente à l'infini, i.e. aux pointes)

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} H^0(X(N)^\times,\omega^{k,j}) &= \mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} H^0(X(1)^\times,\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N),\mathbf{Z})\otimes\omega^{k,j})\\ &= H^0(\Gamma(1),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N),\mathbf{Z})\otimes\mathscr{O}^{\mathrm{temp}}(\mathscr{H}^+)\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j})\end{aligned}$$

On en déduit que (le passage de $\Gamma(1)$ à $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ se fait via le lemme de Shapiro)

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^0(\omega^{k,j}) &= H^0(\Gamma(1),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathbf{Z})\otimes\mathscr{O}^{\mathrm{temp}}(\mathscr{H}^+)\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j})\\ &= H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{A}^+\otimes\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}) = M_{k,j}(\mathbf{C})\end{aligned}$$

Plus généralement,

$$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^0(\mathrm{Fil}^{k-j-r}W_{k,j}^{\mathrm{dR}}) = M_{k,j,r}^{\mathrm{qh}}(\mathbf{C}).$$

Proposition 6.6. — *L'image de* $\underrightarrow{H}^0(\omega^{k,j})$ *dans* $M_{k,j}(\mathbf{C})$ *est* $(2i\pi)^{k-j}M_{k,j}(\mathbf{Q})$.

Démonstration. — Le $(2i\pi)^{k-j}$ vient du passage de $\zeta_{\mathrm{dR}}^j(\frac{dt}{t})^k$ à $\frac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}$. Maintenant, si $g\in H^0(X(N)^\times,\omega^k)$, on note $g_b=\sum_{n\in\frac{1}{N}\mathbf{N}}c_{b,n}(g)q^n$ son q-développement en ∞_b. Si $\phi_g\in M_{k,j}(\mathbf{C})$ correspond à $(2i\pi)^{j-k}g$, on a $\mathscr{K}(\phi_g,n^{]\infty[}b)=c_{b,n}(g)$, si $n>0$ et $b\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$ (en définissant $c_{b,n}(g)$ comme $c_{\overline{b},n}(g)$, si b a comme image $\overline{b}$ dans $(\mathbf{Z}/N)^*$). Or $\sigma_a(g_b)=g_{ab}$ (i.e. $\sigma_a(c_{b,n}(g))=c_{ab,n}(g)$, pour tout $n\in\frac{1}{N}\mathbf{N}$), si $a\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$, puisque $\sigma_a(\infty_b)=\infty_{ab}$. Il s'ensuit que $\sigma_a(\mathscr{K}(\phi_g,u))=\mathscr{K}(\phi_g,au)$, si $a\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $u\in\mathbf{A}^{]\infty[,*}$, ce qui permet de conclure. □

6.4. La conjecture C_{dR} pour les formes modulaires

6.4.1. Formes modulaires quasi-holomorphes géométriques. — On pourra consulter **[64]** pour des compléments sur ce qui suit.

Compte-tenu de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer $\omega^{2,1}\xrightarrow{\sim}\Omega^1$, on peut voir la connexion de Gauss-Manin comme une connexion

$$\nabla: W_{k,j}^{\mathrm{dR}}\to W_{k+2,j+1}^{\mathrm{dR}}.$$

En passant aux sections globales, on obtient une décomposition

$$\underrightarrow{H}^0(W_{k+2,j+1}^{\mathrm{dR}})=\nabla\cdot\underrightarrow{H}^0(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})\oplus\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1}),$$

Autrement dit, l'application naturelle

$$\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1})\to\frac{\underrightarrow{H}^0(W_{k+2,j+1}^{\mathrm{dR}})}{\nabla\cdot\underrightarrow{H}^0(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})}$$

est un isomorphisme (tout ceci est déjà vrai à un niveau fini). La projection

$$\mathrm{Hol}:\underrightarrow{H}^0(W_{k+2,j+1}^{\mathrm{dR}})\to\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1})$$

qui se déduit de la décomposition ci-dessus est la *projection holomorphe* (si on étend les scalaires à $\mathbf{C}$, on obtient la projection orthogonale de $M_{k+2,j+1}^{\mathrm{qh}}(\mathbf{C})$ sur $M_{k+2,j+1}(\mathbf{C})$ pour le produit scalaire de Petersson).

Les $\underrightarrow{H}^i_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})$ sont les groupes d'hypercohomologie du complexe de faisceaux $W^{\mathrm{dR}}_{k,j} \xrightarrow{\nabla} W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1}$. La filtration de Hodge qui se déduit de la définition prend la forme de la suite exacte suivante :

$$0 \to \frac{\underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1})}{\nabla \cdot \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})} \to \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j}) \to \underrightarrow{H}^1(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})^{\nabla=0} \to 0 \tag{6.7}$$

6.4.2. Cohomologie proétale et formes quasi-holomorphes. — Notons $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, $\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\mathscr{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ les faisceaux proétales en anneaux de Fontaine relatifs, et $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ l'anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathbf{C}_p)$. Le théorème de comparaison basique de Scholze **[61, 22]** fournit un isomorphisme

$$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(W^{\text{ét}}_{k,j}) \xrightarrow{\sim} \underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\text{ét}}_{k,j}).$$

La conjecture C_{dR} pour les formes modulaires résulte alors du calcul du membre de droite :

$$\underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\text{ét}}_{k,j}) \cong \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})).$$

Nous aurons besoin d'expliciter une partie de cet isomorphisme. On note

$$\nabla : \mathscr{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \mathscr{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^1$$

la connexion $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$-linéaire, coïncidant avec d sur $\mathscr{O}$. L'application induite par ∇ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes H^0(U, W^{\mathrm{dR}}_{k,j})$, si U est un ouvert d'une courbe modulaire, n'est autre que la connexion de Gauss-Manin. On a une suite exacte de faisceaux proétales

$$0 \to \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \to \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \Omega^1) \to 0.$$

Localement, on a

$$\begin{aligned}
H^0_{\text{proét}}(U_C, \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} H^0(U, W^{\mathrm{dR}}_{k,j}))\\
H^1_{\text{proét}}(U_C, \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= 0\\
H^0_{\text{proét}}(U_C, \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^1) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} H^0(U, W^{\mathrm{dR}}_{k,j} \otimes \Omega^1)),\\
H^1_{\text{proét}}(U_C, \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^1) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\underrightarrow{H}^0_{\text{proét}}(\mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k,j}))\\
\underrightarrow{H}^0_{\text{proét}}(\mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^1) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1}))\\
\underrightarrow{H}^1_{\text{proét}}(\mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1(W^{\mathrm{dR}}_{k,j}))\\
\underrightarrow{H}^1_{\text{proét}}(\mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^1) \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\text{ét}}_{k,j}) &= \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1(W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1}))
\end{aligned}$$

et une suite exacte que l'on pourra comparer avec (6.7).

$$0 \to \frac{\mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1}))}{\nabla \cdot \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k,j}))} \to \underrightarrow{H}^1_{\text{proét}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\mathrm{et}}_{k,j}) \to \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^1(W^{\mathrm{dR}}_{k,j}))^{\nabla=0} \to 0.$$

6.4.3. L'application d'Eichler-Shimura p-adique. — La flèche

$$\iota_{\mathrm{ES},p} : \frac{\mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1}))}{\nabla \cdot \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k,j}))} \to \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{proet}}(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} W^{\mathrm{\acute{e}t}}_{k,j})$$

admet la description suivante.

Soit K un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$. Soit $f \in \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes H^0(X(K)^\times, W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1}))$, et soit U un ouvert affinoïde de $X(K)$, de π_1 géométrique G_U. Si U est assez petit, on peut résoudre l'équation $\nabla g_U = f$ sur U, avec

$$g_U \in \mathrm{Fil}^0(\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\mathrm{dR}}_{k,j}) = (\mathrm{Fil}^0 \mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes W^{\mathrm{\acute{e}t}}_{k,j}.$$

Si $\sigma \in G_U$, alors $\nabla((\sigma-1)g_U) = (\sigma-1)\cdot\nabla g_U = (\sigma-1)f = 0$, et donc $\sigma \mapsto (\sigma-1)g_U$ est un 1-cocycle sur G_U à valeurs dans $H^0(U_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\mathrm{\acute{e}t}}_{k,j})$ (car $(\mathrm{Fil}^0\mathscr{O}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}) \cap \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$). Comme g_U est unique à addition près d'un élément de $H^0(U_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\mathrm{\acute{e}t}}_{k,j})$, la classe $[f]_U$ de ce cocycle dans $H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(U_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\mathrm{\acute{e}t}}_{k,j})$ ne dépend que de f. Pour les mêmes raisons, si U_1, U_2 sont des affinoïdes, les restrictions de $[f]_{U_1}$ et $[f]_{U_2}$ à $U_1 \cap U_2$ coïncident (car $\nabla g_{U_1} - \nabla g_{U_2} = 0$), et donc les $[f]_U$ se recollent pour donner naissance à un élément $\iota_{\mathrm{ES},p}(f)$ de $H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X(K)^\times_C, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\mathrm{\acute{e}t}}_{k,j})$.

6.4.4. q-développement. — Si q désigne le paramètre naturel du voisinage $Z(1)$ de la pointe ∞ (cf. nº 6.2.2), la courbe elliptique universelle est $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, et e_1^*, e_2^* se spécialisent en la base naturelle sur $\widehat{\mathbf{Z}}$ du module de Tate : $e_1^* = (\zeta_N^{-1})_N$ et $e_2^* = (q^{1/N})_N$. L'action du π_1 géométrique se factorise à travers $\mathrm{Aut}(Z(0)_C/Z(1)_C) \cong \mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et on peut choisir le générateur $\gamma := \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}})$ de telle sorte que $\gamma(e_2^*) = e_2^* - e_1^*$ (et on a $\gamma(e_1^*) = e_1^*$). Comme e_1, e_2 est la base duale de e_1^*, e_2^*, on a $\gamma(e_1) = e_1 + e_2$ et $\gamma(e_2) = e_2$.

Soient

$$\tilde{q} = [(q, q^{1/p}, q^{1/p^2}, \dots)] \in H^0(Z(1), \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) \quad \text{et} \quad u = \log(q/\tilde{q}) \in H^0(Z(1), \mathscr{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}).$$

On a

$$\gamma(u) = u + t \quad \text{et} \quad \nabla u = du = \tfrac{dq}{q}.$$

Soient

$$v_1 = ue_2 - te_1 \quad \text{et} \quad v_2 = e_2,$$

de telle sorte que v_1, v_2 est une base sur $\mathscr{O}(Z(1))$ de $H^0(Z(1), W^{\mathrm{dR}}_{1,0})$ (vu comme sous-module de $H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(Z(1)_C, \mathscr{O}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes W^{\mathrm{et}}_{1,0})$) et que v_1 est une base de Fil^1. Si T désigne la variable sur $\mathbf{G}_m$, alors $\frac{dT}{T}$ est un générateur de $H^0(Z(1), \mathrm{Fil}^1 W^{\mathrm{dR}}_{1,0})$), et on a $v_1 = \frac{dT}{T}$ (au signe près... suivant la normalisation dans l'accouplement des périodes p-adiques). Par ailleurs (note 18),

$$du = \tfrac{dq}{q} = \zeta_{\mathrm{dR}}(\tfrac{dT}{T})^2 = \zeta_{\mathrm{dR}} v_1^2, \quad \zeta_{\mathrm{dR}} = -t^{-1}\zeta_{\mathrm{B}} = -t^{-1}(e_1 \wedge e_2)^{-1}. \tag{6.8}$$

Si f est une forme modulaire quasi-holomorphe géométrique, de poids $(k+2, j+1)$, i.e. $f \in \underrightarrow{H}^0(W^{\mathrm{dR}}_{k+2,j+1})$, la restriction de f à $Z(0)_C$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme

$$f = \sum_{i=0}^{k} f_i \otimes v_1^{k+2-i} v_2^i \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1},$$

avec $f_i \in \mathscr{O}(Z(0)_C) = C \otimes_{\mathscr{O}_C} \varinjlim_N \mathscr{O}_C[[q^{1/N}]]$.

6.4.5. Projection holomorphe. — Soit $\partial = \frac{\nabla}{du}$. On a

$$\partial v_1 = v_2 = e_2, \quad \partial v_2 = 0, \quad \partial f_i = \partial_q f_i, \text{ avec } \partial_q = q\frac{d}{dq}.$$

Proposition 6.9. — *Si $f = \sum_{i=0}^{k} f_i \otimes v_1^{k+2-i} v_2^i \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1} \in \underrightarrow{H}^0(W_{k+2,j+1}^{\mathrm{dR}})$, la projection holomorphe* $\mathrm{Hol}(f)$ *de f sur $\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1})$ est*

$$\mathrm{Hol}(f) = \Big(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \tfrac{(k-i)!}{k!} \partial_q^i f_i\Big) \otimes v_1^{k+2} \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1}.$$

Démonstration. — Comme $du = \zeta_{\mathrm{dR}} v_1^2$, On en déduit que

$$\nabla(g \otimes v_1^{k+1-i} v_2^{i-1} \zeta_{\mathrm{dR}}^{j}) = \partial_q g \otimes v_1^{k-i+3} v_2^{i-1} \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1} + (k+1-i) g \otimes v_1^{k-i+2} v_2^i \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1},$$

Une récurrence immédiate montre que, modulo l'image de ∇,

$$g \otimes v_1^{k-i+2} v_2^i \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1} = \tfrac{-1}{k+1-i} \partial_q g \otimes v_1^{k-i+3} v_2^{i-1} \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1} = (-1)^i \tfrac{(k-i)!}{k!} \partial_q^i g \otimes v_1^{k+2} \zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1}.$$

Le résultat s'en déduit. □

7. Vecteurs localement algébriques de la cohomologie complétée

Dans ce chapitre, on rappelle les résultats de Carayol [**8**] et Emerton [**25, 26**] sur la décomposition de l'espace des vecteurs localement algébriques de la cohomologie complétée en somme directe de représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, et on explicite le dictionnaire entre formes modulaires primitives et représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$.

On rappelle que l'on a fixé des plongements $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$ et $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell$, pour tout ℓ.

7.1. Représentations attachées à une forme primitive

Soit $f \in M_{k+2,j+1}^{\mathrm{par,\,cl}}(\Gamma_0(N), \chi)$ primitive (cf. n° 5.1.1), et soient $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ son q-développement et $\mathbf{Q}(f) := \mathbf{Q}(a_n,\, n \geq 1) \subset \mathbf{C}$; alors $\mathbf{Q}(f)$ est un corps de nombres muni d'un plongement dans $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$.

Soit $\mathbf{Q}_p(f) \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$ le composé de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{Q}(f)$. On peut associer à f une représentation $\pi_{f,j+1}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et, si S contient les nombres premiers divisant Np, une représentation $\rho_{f,j+1} : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p(f))$. La représentation $\rho_{f,j+1}$ est caractérisée par le fait que

$$\det(1 - \ell^{-s} \rho_{f,j+1}(\sigma_\ell^{-1})) = 1 - a_\ell \ell^{j-k-1-s} + \chi(\ell) \ell^{2j-k-1-2s}, \quad \text{si } \ell \nmid Np.$$

La représentation $\pi_{f,j+1}$ est celle engendrée par les $g \star \phi_{f,j+1}$ (cf. n° 5.2.3), pour $g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$. L'application associant à $\phi \in \pi_{f,j+1}$ la fonction $\mathscr{K}_\phi := \mathscr{K}(\phi,\ )$ du lemme 5.6 permet d'identifier $\pi_{f,j+1}$ à son modèle de Kirillov. Le nouveau vecteur de ce modèle de Kirillov est la fonction $v_{f,j+1}$ définie par

$$v_{f,j+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \widehat{\mathbf{Z}}, \\ n^{j-k-1}a_n & \text{si } x \in n\widehat{\mathbf{Z}}^*, \text{ et } n \text{ est un entier } \geq 1. \end{cases}$$

La représentation $\pi_{f,j+1}$ se décompose sous la forme d'un produit tensoriel restreint

$$\pi_{f,j+1} = \otimes'_\ell \pi_{f,j+1,\ell},$$

et $v_{f,j+1}$ comme le produit tensoriel des nouveaux vecteurs $v_{f,j+1,\ell}$ des $\pi_{f,j+1,\ell}$:

$$v_{f,j+1} = \otimes_\ell v_{f,j+1,\ell}, \quad \text{i.e. } v_{f,j+1}(u) = \prod_\ell v_{f,j+1,\ell}(u_\ell), \text{ si } u = (u_\ell)_\ell.$$

Si $\ell \nmid N$, alors

$$\pi_{f,j+1,\ell} \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{Q}_\ell)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)}(\chi_{\ell,1} \otimes |\ |_\ell^{-1}\chi_{\ell,2}),$$

où $\chi_{\ell,1}$ et $\chi_{\ell,2}$ sont des caractères non ramifiés de $\mathbf{Q}_\ell^*$, et

$$(1-\chi_{\ell,1}(\ell)X)(1-\chi_{\ell,2}(\ell)X) = 1 - \ell^{j-k-1}a_\ell X + \chi(\ell)\ell^{2j-k-1}X^2.$$

On a $(\rho_{f,j+1})_{|G_{\mathbf{Q}_\ell}} = \chi_{\ell,1} \oplus \chi_{\ell,2}$. Plus généralement, $\Pi_\ell^{\mathrm{cl}}(\rho_{f,j+1,\ell}) = \pi_{f,j+1,\ell}$, pour tout ℓ.

On a

$$L(\rho_{f,j+1}, s) = L(\pi_{f,j+1}, s) = L(v_{f,j+1}, s) = L(f, s+k+1-j)$$

(où $k+1-j = (k+2)-(j+1)$). Donc

$$\rho_{f,j+1} = \rho_f \otimes \varepsilon_p^{k+1-j}.$$

Les poids de Hodge-Tate de $\rho_{f,j+1}$ sont $-j = -(k+1)+(k+1-j)$ et $k+1-j$.

Théorème 7.1. — (Carayol [**8**])

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})}(\pi_{f,j+1}, \underrightarrow{H}^1_{\text{ét},c}(W_{k,j}^{\text{ét}})) = \rho_{f,j+1}^*.$$

7.2. Représentations cohomologiques

Soit π une $\mathbf{Q}$-représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, lisse, irréductible. On dit que π *est cohomologique* s'il existe (k,j) tel que

$$m(\pi) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]}(\pi, H^1_{\mathrm{par}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}) \otimes W_{k,j})) \neq 0.$$

Notons que cela implique que π *est cuspidale*, que $\mathrm{End}_{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\pi$ est un corps de nombres $\mathbf{Q}(\pi)$, et que π admet un caractère central ω_π à valeurs dans $\mathbf{Q}(\pi)^*$. Le couple (k,j) est alors uniquement déterminé et on dit que π *est cohomologique de poids* $(k+2, j+1)$.

7.2.1. Multiplicités des représentations lisses. — Soit π cohomologique de poids $(k+2, j+1)$. On fixe un plongement $\mathbf{Q}(\pi) \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ et on note $\mathbf{Q}_p(\pi) \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$ le composé de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{Q}(\pi)$.

On rappelle que $F^{\mathrm{truc}} = \mathbf{Q}$ si truc $\in \{\mathrm{B}, \mathrm{dR}\}$ et $F^{\mathrm{truc}} = \mathbf{Q}_p$ si truc $=$ ét. Si truc $\in \{\mathrm{B}, \mathrm{dR}, \text{ét}\}$, on pose

$$m_{\mathrm{truc}}(\pi) = \mathrm{Hom}_{F^{\mathrm{truc}}[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]}(\pi, \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W_{k,j}^{\mathrm{truc}})).$$

(Comme π est cuspidale, on obtiendrait le même module en remplaçant la cohomologie parabolique par l'usuelle ou celle à support compact.)

Les $m_{\mathrm{truc}}(\pi)$ sont des $F^{\mathrm{truc}}(\pi)$-modules grâce à l'action de $\mathbf{Q}(\pi)$ sur π, et ils sont de rang 2. On a des isomorphismes de comparaison :

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{B}}(\pi) &= m(\pi) \\ m_{\text{ét}}(\pi) &= \mathbf{Q}_p(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{B}}(\pi), \\ \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{B}}(\pi) &\cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{dR}}(\pi), \\ \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{B}}(\pi) &\cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{dR}}(\pi). \end{aligned}$$

En particulier, m_{dR} est un $\mathbf{Q}(\pi)$-module filtré de rang 2 : on note $m_{\mathrm{dR}}^+(\pi)$ le cran non trivial de la filtration sur $m_{\mathrm{dR}}(\pi)$,

$$m_{\mathrm{dR}}^+(\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]}(\pi, \underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1})),$$

et $m_{\mathrm{dR}}^-(\pi)$ le quotient, de telle sorte que le gradué associé est

$$\mathrm{gr}(m_{\mathrm{dR}}(\pi)) = m_{\mathrm{dR}}^+(\pi) \oplus m_{\mathrm{dR}}^-(\pi).$$

De même, $m_{\text{ét}}(\pi)$ est une représentation de $G_{\mathbf{Q}}$ de rang 2 sur $\mathbf{Q}_p(\pi)$; sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham à poids de Hodge-Tate j et $j-k-1$, et

$$D_{\mathrm{dR}}(m_{\text{ét}}(\pi)) = \mathbf{Q}_p(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{dR}}(\pi)$$

en tant que $\mathbf{Q}_p(\pi)$-module filtré.

La théorie de Hodge fournit un scindage naturel de la filtration de Hodge, après extension des scalaires à $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{dR}}(\pi) = m^{(k+1-j,-j)}(\pi) \oplus m^{(-j,k+1-j)}(\pi),$$

avec

$$m^{(k+1-j,-j)}(\pi) = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{dR}}^+(\pi) \quad \text{et} \quad m^{(-j,k+1-j)}(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m_{\mathrm{dR}}^-(\pi).$$

De plus, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_\infty$ échange $m^{(-j,k+1-j)}(\pi)$ et $m^{(k+1-j,-j)}(\pi)$.

7.2.2. Dualité. — On note $\check{\pi}$ la *contragrédiente de* π, i.e. l'espace des vecteurs $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-lisses de $\mathrm{Hom}(\pi,\mathbf{Q})$. On a $\omega_{\check{\pi}}=\omega_\pi^{-1}$, et $\check{\pi}\cong\pi\otimes\omega_\pi^{-1}$. On en déduit, en utilisant le (i) du lemme 5.1, que $\check{\pi}$ est de poids $(k+2,k+1-j)$.

Si truc $\in\{\mathrm{B},\mathrm{\acute{e}t},\mathrm{dR}\}$, on a une application naturelle de $\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})$ dans $\underleftarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})$, envoyant $(x_N)_N$ sur $(\frac{1}{[\widehat{\Gamma}(1):\widehat{\Gamma}(N)]}x_N)_N$, et donc un accouplement naturel

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{truc}}:\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,k-j})\times\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{truc,\,par}}(W^{\mathrm{truc}}_{k,j})\to F^{\mathrm{truc}}\otimes\zeta_{\mathrm{truc}}^{-1}$$

On en déduit des dualités naturelles

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{truc}}:m_{\mathrm{truc}}(\check{\pi})\times m_{\mathrm{truc}}(\pi)\to F^{\mathrm{truc}}\otimes\zeta_{\mathrm{truc}}^{-1},$$

définies par

$$\langle\check{\gamma}(\check{v}),\gamma(v)\rangle_{\mathrm{truc}}=\langle\check{\gamma},\gamma\rangle_{\mathrm{truc}}\cdot\langle\check{v},v\rangle,$$

pour tous $\check{v}\in\check{\pi}$, $v\in\pi$.

7.2.3. Encadrement et modèle de Kirillov. — Un *encadrement de* π est un modèle de Kirillov pour π, i.e. une injection $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariante

$$\pi\hookrightarrow\mathrm{LC}\big(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{Q}(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}\big)^{\widehat{\mathbf{Z}}^*},$$

où $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ agit par $(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\phi)(x)=\mathbf{e}^{]\infty[}(bx)\phi(ax)$, et l'invariance par $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ se traduit par $\phi(ax)=\sigma_a(\phi(x))$, si $a\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $x\in\mathbf{A}^{]\infty[,*}$ (et σ_a agit sur $\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$). Toute représentation cohomologique irréductible admet un encadrement (unique à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}(\pi)^*$).

Une *représentation encadrée* de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ est un sous-$\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-module

$$\pi\subset\mathrm{LC}\big(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{Q}(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}\big)^{\widehat{\mathbf{Z}}^*},$$

muni d'une action lisse de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ étendant celle de $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

7.2.4. Encadrement de représentations localement algébriques. — Soit

$$\mathrm{LP}^{[-j,k-j]}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{Q}_p(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$$

l'espace des $\sum_{i=-j}^{k-j}\phi_iX^i$, avec $\phi_i\in\mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{Q}_p(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$. On munit cet espace d'une action de $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ par la formule

$$\big(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\phi\big)(u,X)=\mathbf{e}(bx)e^{b_pX}\phi(au,a_pX).$$

Si $\pi^{\mathrm{alg}}=\pi\otimes_{\mathbf{Q}(\pi)}W^*_{k,j}(\mathbf{Q}_p(\pi))$, *un encadrement de* π^{alg} est un modèle de Kirillov pour π^{alg}, i.e. une injection $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariante

$$\pi^{\mathrm{alg}}\hookrightarrow\mathrm{LP}^{[-j,k-j]}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{Q}_p(\pi)\otimes\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})^{\widehat{\mathbf{Z}}^*},$$

l'invariance par $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ se traduisant par $\phi(au,X)=\sigma_a(\phi(u,X))$.

Si π est encadrée, on fabrique un encadrement de π^{alg} par :

$$\sum_{i=0}^{k}\phi_i\otimes\tfrac{(e_2^*)^{k-i}(e_1^*)^i}{(k-i)!\,(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\mapsto\sum_{i=0}^{k}\phi_iX^{i-j}.$$

7.2.5. Nouveau vecteur. — Si π est de conducteur N, il existe $v_\pi\in\pi$, unique, le *nouveau vecteur* de π, tel que

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\star v_\pi=\omega_\pi(d)v_\pi,\ \text{pour tout}\ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\widehat{\Gamma}_0(N),\quad v_\pi(x)=1,\ \text{si}\ x\in\widehat{\mathbf{Z}}^*.$$

Notons que v_π est à support dans $\widehat{\mathbf{Z}}$ (par invariance par $\left(\begin{smallmatrix}1&\widehat{\mathbf{Z}}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$), et que $v_\pi(x)\in\mathbf{Q}(\pi)$ (par invariance par $\widehat{\mathbf{Z}}^*$) et ne dépend que de $|x|_{\mathbf{A}}$ (par invariance par $\left(\begin{smallmatrix}\widehat{\mathbf{Z}}^*&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$).

7.2.6. Factorisation de π. — La fonction v_π admet une factorisation naturelle sous la forme

$$v_\pi(u^{]\infty[})=\prod_\ell v_{\pi,\ell}(u_\ell),\quad \text{où } v_{\pi,\ell}\in \mathrm{LC}\big(\mathbf{Q}_\ell^*,\mathbf{Q}(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})\big)^{\mathbf{Z}_\ell^*}\ \text{et}\ v_{\pi,\ell}(1)=1.$$

Les translatés de v_π sous l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ sont de la forme $v_\pi^{]\ell[}\otimes\phi_\ell$, où

$$v_\pi^{]\ell[}=\otimes_{q\neq\ell}v_{\pi,q},\quad \text{i.e. } v_\pi^{]\ell[}(u^{]\infty,\ell[})=\prod_{q\neq\ell}v_{\pi,q}(u_q),$$

et $\phi_\ell\in\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*,\mathbf{Q}(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}))^{\mathbf{Z}_\ell^*}$. Le $\mathbf{Q}(\pi)$-espace π_ℓ engendré par les ϕ_ℓ hérite de l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$; c'est donc une représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$, naturellement encadrée, et dont le nouveau vecteur est $v_{\pi,\ell}$.

L'application $\otimes_\ell(\pi_\ell,v_{\pi,\ell})\to\mathrm{LC}\big(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{Q}(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}\big)^{\widehat{\mathbf{Z}}^*}$ envoyant $\otimes_\ell\phi_\ell$, où $\phi_\ell=v_{\pi,\ell}$ pour presque tout ℓ, sur la fonction $u^{]\infty[}\mapsto\prod_\ell\phi_\ell(u_\ell)$, induit un isomorphisme $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariant

$$\otimes_\ell(\pi_\ell,v_{\pi,\ell})\cong(\pi,v_\pi).$$

7.2.7. L'élément $\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+$ de $m_{\mathrm{dR}}(\pi)$ et la forme modulaire f_π. — L'espace $m_{\mathrm{dR}}^+(\pi)$ admet une base naturelle $\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+$ définie par

$$\begin{aligned}\big(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+(v)\big)(\tau,\left(\begin{smallmatrix}u&0\\0&1\end{smallmatrix}\right))&=(-2i\pi)^{k+1-j}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}n^{(k+2)-(j+1)}v(nu)\mathbf{e}_\infty(-n\tau)\Big)\otimes\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\tau\\&=(-1)^k\Big(\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}n^{(k+2)-(j+1)}v(nu)\mathbf{e}_\infty(-n\tau)\Big)\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}^{j+1}\big(\tfrac{dt}{t}\big)^{k+2}\end{aligned}$$

La forme modulaire f_π définie par

$$\big(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+(v_\pi)\big)(\tau,1^{]\infty[})=f_\pi(\tau)\otimes(-2i\pi)^{k+1-j}\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\tau$$

est primitive, et appartient à $S_{k+2}(\Gamma_0(N),\tilde\omega_\pi^{-1})$. Son q-développement est

$$f_\pi=\sum_{n\geq1}a_nq^n,\quad \text{avec } a_n=n^{k+1-j}v_\pi(n^{]\infty[}).$$

On note f_π^* la forme modulaire dont le q-développement est

$$f_\pi^* = \sum_{n\geq 1} \overline{a_n} q^n, \quad \text{et donc } f_\pi^*(\tau) = \overline{f_\pi(-\overline{\tau})}.$$

On a aussi

$$f_\pi^* = f_\pi \otimes \tilde{\omega}_\pi \quad (\text{i.e. } \overline{a_n} = \tilde{\omega}_\pi(n) a_n).$$

Alors π et ses multiplicités s'expriment en termes de f_π et des représentations associées :

$$\pi \cong \pi_{f_\pi, j+1}, \quad m_{\text{ét}}(\pi) \cong \rho^*_{f_\pi, j+1} \cong \rho_{f_\pi^*} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_p^j.$$

7.2.8. L'élément $\iota^-_{\mathrm{dR},\pi}$ de $m_{\mathrm{dR}}(\pi)$ et la période $\lambda(\pi)$. — L'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ est identiquement nul sur $m^+_{\mathrm{dR}}(\check{\pi}) \times m^+_{\mathrm{dR}}(\pi)$; il induit donc des dualités sur $m^-_{\mathrm{dR}}(\check{\pi}) \times m^+_{\mathrm{dR}}(\pi)$ et $m^+_{\mathrm{dR}}(\check{\pi}) \times m^-_{\mathrm{dR}}(\pi)$. On note $\iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}}$ et $\iota^-_{\mathrm{dR},\pi}$ les éléments de $m^-_{\mathrm{dR}}(\check{\pi})$ et $m^-_{\mathrm{dR}}(\pi)$ vérifiant

$$\langle \iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}}, \iota^+_{\mathrm{dR},\pi} \rangle_{\mathrm{dR}} = \zeta_{\mathrm{dR}}^{-1}, \quad \langle \iota^+_{\mathrm{dR},\check{\pi}}, \iota^-_{\mathrm{dR},\pi} \rangle_{\mathrm{dR}} = \zeta_{\mathrm{dR}}^{-1},$$

et on note encore $\iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}}$ et $\iota^-_{\mathrm{dR},\pi}$ leurs représentants harmoniques dans $m^{(j-k,j+1)}(\check{\pi})$ et $m^{(-j,k+1-j)}(\pi)$.

Il existe $\lambda(\pi), \lambda(\check{\pi}) \in \mathbf{C}$ tels que

$$\iota^-_{\mathrm{dR},\pi} = \lambda(\pi) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_\infty \star \iota^+_{\mathrm{dR},\pi}, \quad \iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}} = \lambda(\check{\pi}) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_\infty \star \iota^+_{\mathrm{dR},\check{\pi}}$$

Lemme 7.2. — *On a $\lambda(\pi) = -\lambda(\check{\pi})$.*

Démonstration. — Posons

$$\phi^+_\pi = \iota^+_{\mathrm{dR},\pi}(v_\pi), \quad \phi^-_\pi = \iota^-_{\mathrm{dR},\pi}(v_\pi), \quad \check{\phi}^+_\pi = \iota^+_{\mathrm{dR},\check{\pi}}(v_{\check{\pi}}), \quad \check{\phi}^-_\pi = \iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}}(v_{\check{\pi}})$$

Par définition,

$$\langle \iota^+_{\mathrm{dR},\check{\pi}}, \iota^-_{\mathrm{dR},\pi} \rangle_{\mathrm{dR}} = \langle \check{\phi}^+_\pi, \phi^-_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} = \zeta_{\mathrm{dR}}^{-1}, \quad \langle \iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}}, \iota^+_{\mathrm{dR},\pi} \rangle_{\mathrm{dR}} = \langle \check{\phi}^-_\pi, \phi^+_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} = \zeta_{\mathrm{dR}}^{-1}.$$

Posons $w_\infty = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_\infty$. On a

$$\phi^-_\pi = \lambda(\pi)\, w_\infty \star \phi^+_\pi, \quad \check{\phi}^-_\pi = \lambda(\check{\pi})\, w_\infty \star \check{\phi}^+_\pi.$$

Comme $w_\infty^2 = 1$ et $\langle w_\infty \star \check{\phi}, w_\infty \star \phi \rangle_{\mathrm{dR}} = -\langle \check{\phi}, \phi \rangle_{\mathrm{dR}}$ car $\tau \mapsto \overline{\tau}$ renverse l'orientation, il résulte de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \lambda(\pi) = -\langle w_\infty \star \check{\phi}^-_\pi, \lambda(\pi) w_\infty \star \phi^+_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} &= -\langle w_\infty \star \check{\phi}^-_\pi, \phi^-_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} \\ &= -\langle \lambda(\check{\pi}) \check{\phi}^+, \phi^-_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} = -\lambda(\check{\pi}) \end{aligned}$$

□

Lemme 7.3. — *Soit $v_\pi^{]S[} = \otimes_{\ell \notin S} v_{\pi,\ell}$. Si $\eta : \mathbf{Z}_S^* \to L^*$ est un caractère localement constant, alors :*

$$(\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}(v_\pi^{]S[} \otimes \eta))\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = (-2i\pi)^{k+1-j} \eta(u) (f_\pi \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_S^*} \eta)(\tau) \otimes \tfrac{(\tau e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} d\tau$$

$$(\iota^-_{\mathrm{dR},\pi}(v_\pi^{]S[} \otimes \eta))\big(\tau, \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = \eta(-1)\lambda(\pi)(2i\pi)^{k+1-j} \eta(u) (f_\pi \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_S^*} \eta)(-\overline{\tau}) \otimes \tfrac{(\overline{\tau} e_2 - e_1)^k}{(e_1 \wedge e_2)^j} d\overline{\tau}$$

Démonstration. — La première formule est immédiate sur la définition. La seconde se démontre en utilisant la formule $\iota^-_{\mathrm{dR},\pi} = \lambda(\pi) w_\infty \star \iota^+_{\mathrm{dR},\pi}$ (cela fait apparaître le $\lambda(\pi)$ et remplace τ par $\overline{\tau}$), puis en utilisant l'invariance par $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$ (cela change e_1 en $-e_1$, u en $-u$ et $\overline{\tau}$ en $-\overline{\tau}$). $\square$

7.2.9. Les périodes $\Omega^\pm_\pi$. — Après extension des scalaires, $m(\pi)$ acquiert une base naturelle :

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m(\pi) = \mathbf{C}\, \iota^+_{\mathrm{ES}} \circ \iota^+_{\mathrm{dR},\pi} \oplus \mathbf{C}\, \iota^-_{\mathrm{ES}} \circ \iota^+_{\mathrm{dR},\pi}.$$

On note $\Omega^\pm_\pi(\gamma)$ les coordonnées de $\gamma \in m(\pi)$ dans cette base (ce sont des nombres transcendants) :

$$\gamma = \Omega^+_\pi(\gamma)\, \iota^+_{\mathrm{ES}} \circ \iota^+_{\mathrm{dR},\pi} + \Omega^-_\pi(\gamma)\, \iota^-_{\mathrm{ES}} \circ \iota^+_{\mathrm{dR},\pi}.$$

Lemme 7.4. — *Si $\gamma \in m(\pi)$ et $\check{\gamma} \in m(\check{\pi})$, alors*

$$\langle \check{\gamma}, \gamma \rangle_{\mathrm{B}} \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = 2i\pi\, \frac{\Omega^+_{\check{\pi}}(\check{\gamma})\Omega^-_\pi(\gamma) - \Omega^-_{\check{\pi}}(\check{\gamma})\Omega^+_\pi(\gamma)}{2\,\lambda(\check{\pi})} = 2i\pi\, \frac{\Omega^-_{\check{\pi}}(\check{\gamma})\Omega^+_\pi(\gamma) - \Omega^+_{\check{\pi}}(\check{\gamma})\Omega^-_\pi(\gamma)}{2\,\lambda(\pi)}.$$

Démonstration. — Par définition, $\langle \check{\gamma}, \gamma \rangle_{\mathrm{B}} = \langle \check{\gamma}(v_{\check{\pi}}), \gamma(v_\pi) \rangle_{\mathrm{B}}$. On écrit $\gamma = \gamma^+ + \gamma^-$ et $\check{\gamma} = \check{\gamma}^+ + \check{\gamma}^-$. Alors, par définition des périodes $\Omega^\pm$ et de $\phi^\pm_\pi$, $\phi^\pm_{\check{\pi}}$ (rem. 7.2), on a

$$\gamma^\pm(v_\pi) = \Omega^\pm_\pi(\gamma)\iota_{\mathrm{ES}}\big(\tfrac{1}{2}\big(\phi^+_\pi \pm (w_\infty \star \phi^+_\pi)\big)\big), \quad \check{\gamma}^\pm(v_{\check{\pi}}) = \Omega^\pm_{\check{\pi}}(\check{\gamma})\iota_{\mathrm{ES}}\big(\tfrac{1}{2}\big(\check{\phi}^+_\pi \pm (w_\infty \star \check{\phi}^+_\pi)\big)\big).$$

On utilise les formules

$$\begin{aligned}
&\langle \iota_{\mathrm{ES}}(\check{\phi}), \iota_{\mathrm{ES}}(\phi) \rangle_{\mathrm{B}} \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = 2i\pi\, \langle \check{\phi}, \phi \rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} \\
&\big\langle \check{\phi}^-_\pi, \phi^+_\pi \big\rangle_{\mathrm{dR}} = \zeta^{-1}_{\mathrm{dR}} = -\langle w_\infty \star \check{\phi}^-_\pi, w_\infty \star \phi^+_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} \\
&\langle w_\infty \star \check{\phi}^-_\pi, \phi^+_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} = \langle \check{\phi}^-_\pi, w_\infty \star \phi^+_\pi \rangle_{\mathrm{dR}} = 0
\end{aligned}$$

(La première ligne provient de (6.3), la seconde vient des définitions et la troisième de ce que l'on a affaire au cup-produit de deux 1-formes holomorphes ou antiholomorphes.) On en déduit l'identité (avec $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$)

$$\begin{aligned}
\big\langle \check{\phi}^+_\pi + \varepsilon(w_\infty \star \check{\phi}^+_\pi), \phi^+_\pi + \varepsilon'(w_\infty \star \phi^+_\pi) \big\rangle &= \frac{1}{\lambda(\check{\pi})} \big\langle (w_\infty \star \check{\phi}^-_\pi) + \varepsilon \check{\phi}^-_\pi, \phi^+_\pi + \varepsilon'(w_\infty \star \phi^+_\pi) \big\rangle \\
&= \varepsilon - \varepsilon'
\end{aligned}$$

et le résultat. $\square$

7.2.10. Multiplicité des représentations localement algébriques. — Soit

$$\pi^{\mathrm{alg}} = \pi \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} W^*_{k,j}(L(\pi)).$$

Alors π^{alg} est une représentation localement algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$. On pose

$$m(\pi^{\mathrm{alg}}) = \mathrm{Hom}_{L[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]}\big(\pi^{\mathrm{alg}}, H^1_{\mathrm{par}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))\big).$$

L'application naturelle $(\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}) \otimes W_{k,j}) \otimes_{\mathbf{Q}} W^*_{k,j}(L) \to \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)$ induit, d'après [**26**, th. 7.4.2] et [**8**], un isomorphisme $L(\pi)$-équivariant

$$m_{\text{ét}}(\pi) = L(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} m(\pi) \xrightarrow{\sim} m(\pi^{\mathrm{alg}})$$

On a alors une décomposition $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariante, pour truc $\in \{\ , c, \mathrm{par}\}$

$$H^1_{\mathrm{truc}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))^{\mathrm{alg}} = \Big(\bigoplus_{\Pi} \big(m_{\mathrm{\acute{e}t}}(\Pi) \otimes_{L(\Pi)} \Pi^{\mathrm{alg}}\big)\Big) \bigoplus \left(\begin{smallmatrix}\text{contribution}\\ \text{des pointes}\end{smallmatrix}\right) \tag{7.5}$$

où Π parcourt les L-représentations cohomologiques irréductibles, les $m_{\mathrm{\acute{e}t}}(\Pi)$ sont deux à deux non isomorphes, et « contribution des pointes » est une somme de représentations de la forme $\chi \otimes I$, où χ est un caractère de $G_{\mathbf{Q}}$ et I est une représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ de la série principale (induite d'un caractère du borel) ; ce terme est nul si truc $=$ par, et disparaît dans les autres cas quand on localise en un idéal non-eisenstein.

Proposition 7.6. — *Si $S \subset \mathscr{P}$ est fini et contient p, alors*

$$\mathrm{Hom}_{L[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty, S[})]}\big(L(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} \pi^{]S[}, H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))^{\mathrm{alg}}\big) = m_{\mathrm{\acute{e}t}}(\pi) \otimes_{L(\pi)} \pi_S^{\mathrm{alg}}$$

Démonstration. — Cela résulte de la décomposition (7.5) et du théorème de multiplicité 1 : la représentation $\pi^{]S[}$ détermine $m_{\mathrm{\acute{e}t}}(\pi)$ par le théorème de densité de Čebotarev, qui elle-même détermine les π_ℓ pour $\ell \in S$ ainsi que π_p^{alg} car la composante algébrique est encodée dans les poids de Hodge-Tate de la restriction de $m_{\mathrm{\acute{e}t}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$. □

7.3. Torsion par un caractère

7.3.1. Torsion d'une représentation encadrée. — Si π est une représentation encadrée de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, et si $\chi : \mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^* \to L^*$ est un caractère lisse, on note $\pi \otimes \chi$ la représentation encadrée dont l'espace est [19] $\{G(\chi^{-1})\phi\,\chi,\ \phi \in \pi\}$, avec action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ donnée par

$$g \star (\phi\,\chi) = \chi(\det g)\,(g \star \phi)\,\chi.$$

On a

$$\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\phi\chi)\big)(x) = \mathbf{e}^{]\infty[}(bx)\phi(ax)\chi(ax) = \chi(a)\big(\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \phi\big)\chi\big)(x),$$

ce qui prouve que l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ prolonge bien l'action de $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

• *Torsion par une puissance de $|\ |_{\mathbf{A}}$.*— Si π est une représentation cohomologique encadrée de poids $(k+2, j+1)$, et si $a \in \mathbf{Z}$, alors $\pi \otimes |\ |_{\mathbf{A}}^a$ est de poids $(k+2, j+1-a)$, et on a un isomorphisme naturel

$$m_{\mathrm{B}}(\pi \otimes |\ |_{\mathbf{A}}^a) \cong m_{\mathrm{B}}(\pi) \otimes (e_1 \wedge e_2)^a,$$

avec $(\gamma \otimes (e_1 \wedge e_2)^a)(v) = \gamma(v) \otimes (\delta_{\mathbf{A}}^a \circ \det)(e_1 \wedge e_2)^a$ comme dans la rem. 5.11 (modulo l'identification $m_{\mathrm{B}}(\pi) = m(\pi)$).

19. Voir le lemme 5.9 pour l'introduction de la somme de Gauss.

Comme $e_1 \wedge e_2 = -\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}
m_{\mathrm{B}}(\pi \otimes |\ |_{\mathbf{A}}^{a}) &= m_{\mathrm{B}}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a},\\
m_{\text{ét}}(\pi \otimes |\ |_{\mathbf{A}}^{a}) &= m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a},\\
m_{\mathrm{dR}}(\pi \otimes |\ |_{\mathbf{A}}^{a}) &= m_{\mathrm{dR}}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}^{-a}.
\end{aligned}$$

Lemme 7.7. — *Si $\gamma \in m_{\mathrm{B}}(\pi)$, alors*

$$\Omega^{\pm}_{\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{a}}(\gamma \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a}) = (2i\pi)^{-a}\Omega_{\pi}^{\pm(-1)^{a}}(\gamma).$$

Démonstration. — On a $|nu|_{\mathbf{A}}^{a} = n^{-a}\delta_{\mathbf{A}}^{a}(u)$, et donc

$$\begin{aligned}
n^{(k+2)-(j+1-a)}(v \otimes |\ |_{\mathbf{A}}^{a})(nu) &= n^{(k+2)-(j+1)}\delta_{\mathbf{A}}^{a}(u)v(nu)\\
\iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{a}} &= \delta_{\mathbf{A}}^{a}\iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}^{-a}
\end{aligned}$$

On en déduit, via les rem. 5.8 et 5.11 (en particulier pour l'apparition du $(-1)^{a}$), que

$$\iota^{\pm}_{\mathrm{ES}} \circ \iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{a}} = (2i\pi)^{a}(\iota_{\mathrm{ES}}^{\pm(-1)^{a}} \circ \iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi}) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a}.$$

D'où les relations

$$\begin{aligned}
\Omega_{\pi}^{\pm}(\gamma)(\iota^{\pm}_{\mathrm{ES}} \circ \iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi}) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a} = \gamma^{\pm} \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a} &= \Omega^{\pm(-1)^{a}}_{\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{a}}(\gamma \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a})\, \iota_{\mathrm{ES}}^{\pm(-1)^{a}} \circ \iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{a}}\\
&= \Omega^{\pm(-1)^{a}}_{\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{a}}(\gamma \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a})(2i\pi)^{a}(\iota^{\pm}_{\mathrm{ES}} \circ \iota^{+}_{\mathrm{dR},\pi}) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-a}
\end{aligned}$$

et le résultat. □

• *Torsion des vecteurs localement algébriques.*— Si π est cohomologique de poids $(k+2, j+1)$, on note π^{alg} la représentation localement algébrique $\pi \otimes W^{*}_{k,j}$. Si χ est de poids a, alors, en tant que représentation encadrée, on

$$(\pi \otimes \chi)^{\mathrm{alg}} = \{G(\chi)^{-1}X^{a}\chi^{(p)}\phi,\ \phi \in \pi^{\mathrm{alg}}\},$$

où $\chi^{(p)}$ est le caractère p-adique associé à χ (cf. nº 1.1.3). On a aussi

$$m_{\text{ét}}(\pi \otimes \chi) = m_{\text{ét}}(\pi) \otimes G(\chi)\zeta_{\mathrm{B}}^{-a}$$

(Notons que $\sigma(G(\chi)\zeta_{\mathrm{B}}^{-a}) = \chi_{\mathrm{Gal}}(\sigma)^{-1}G(\chi)\zeta_{\mathrm{B}}^{-a}$, pour tout $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$, i.e. $m_{\text{ét}}(\pi \otimes \chi) = m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \chi_{\mathrm{Gal}}^{-1}$ en tant que représentation de $G_{\mathbf{Q}}$.) L'accouplement naturel

$$m_{\text{ét}}(\pi \otimes \chi) \otimes (\pi \otimes \chi)^{\mathrm{alg}} \to H^{1}_{c}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$$

est relié à celui pour π par la formule

$$\langle \gamma \otimes G(\chi)\zeta_{\mathrm{B}}^{-a}, G(\chi)^{-1}X^{a}\chi^{(p)}\phi\rangle = (\chi^{(p)} \circ \det)\langle \gamma, \phi\rangle$$

(La multiplication par $\chi^{(p)} \circ \det$ commute à l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, et donc fournit un isomorphisme de $H^{1}_{c}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)$.)

PARTIE III
MODÈLE DE KIRILLOV ET FACTORISATION DE LA COHOMOLOGIE COMPLÉTÉE

8. La cohomologie de la boule unité

Dans ce chapitre, on rassemble un certain nombre de résultats concernant la cohomologie proétale de la boule unité ouverte. En particulier, on définit un q-développement pour la cohomologie à valeurs dans certains systèmes locaux (la flèche $\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$ de (8.9)) et on prouve une loi de réciprocité explicite (th. 8.14) mettant en scène une application logarithme qui est un analogue géométrique d'un inverse de l'exponentielle de Bloch-Kato.

Si X est un espace perfectoïde, on note $\widetilde{\mathbb{A}}(X)$, $\widetilde{\mathbb{A}}^+(X)$, $\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(X)$ les sections globales sur X des faisceaux proétales $\widetilde{\mathbb{A}}$, $\widetilde{\mathbb{A}}^+$, $\widetilde{\mathbb{A}}^{++}$: si X est un affinoïde perfectoïde, alors $\widetilde{\mathbb{A}}(X) = W(\mathscr{O}(X)^\flat)$, $\widetilde{\mathbb{A}}^+(X) = W(\mathscr{O}^+(X)^\flat)$, $\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(X) = W(\mathscr{O}^{++}(X)^\flat)$. De même, on note $\mathbb{B}_{\rm dR}^+(X)$ les sections globales sur X du faisceau proétale $\mathbb{B}_{\rm dR}^+$.

Soit C un corps complet pour v_p, et algébriquement clos. On note $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$ et $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$ les anneaux de Fontaine correspondants (on peut les voir comme les sections globales des faisceaux ci-dessus sur ${\rm Spa}(C, \mathscr{O}_C)$).

8.1. Cohomologie de la boule fermée

8.1.1. La boule fermée. — Soit B la boule fermée ${\rm Spa}(C\langle q\rangle, \mathscr{O}_C\langle q\rangle)$; on note $B^\times$ la boule B munie d'une structure logarithmique en 0. On note $\overline{B}$ le revêtement universel de $B^\times$: $\mathscr{O}(\overline{B})$ est le complété de l'extension maximale de $\mathscr{O}(B) = C\langle q\rangle$, étale en dehors de 0. La boule fermée perfectoïde B_∞ est un quotient de $\overline{B}$: on a $B_\infty = {\rm Spa}(C\langle q^{p^{-\infty}}\rangle, \mathscr{O}_C\langle q^{p^{-\infty}}\rangle)$ où $\mathscr{O}_C\langle q^{p^{-\infty}}\rangle$ est le complété p-adique de $\varinjlim_n \mathscr{O}_C[q^{p^{-n}}]$, i.e. l'anneau des $\sum_{i\in I} a_i q^i$, $I = p^{-\infty}\mathbf{N}$, avec $a_i \to 0$ quand $i\to\infty$ — suivant le filtre des complémentaires des parties finies — dans I. On note $B_\infty^\times$ la boule B_∞ munie d'une structure logarithmique en 0.

On pose
$$G_B = {\rm Aut}(\overline{B}/B) \quad \text{et} \quad H_B = {\rm Aut}(\overline{B}/B_\infty).$$
Alors
$${\rm Aut}(B_\infty/B) = G_B/H_B \cong \mathbb{U}(\mathbf{Z}_p) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right).$$
On note γ_u l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$, et on note simplement γ le générateur topologique γ_1 de $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$. Sur $\mathscr{O}(B_\infty)$, l'action de $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ est $\gamma_u^* q^i = \mathbf{e}_p(ui)q^i$; elle s'étend en une action de $\mathbb{U}(\mathbf{Q}_p)$ par la même formule.

On note $B_{\rm Kum}$ le revêtement de Kummer maximal de $B^\times$: on rajoute les $q^{1/N}$, pour tout N, et pas seulement pour $N \mid p^\infty$, et $B_{\rm Kum} = {\rm Spa}(C\langle q^{\mathbf{Q}_+}\rangle, \mathscr{O}_C\langle q^{\mathbf{Q}_+}\rangle)$. Alors $B_{\rm Kum}$ est un quotient de $\overline{B}$ et $\overline{B}/B_{\rm Kum}$ est étale ; on note $H_{\rm Kum}$ le groupe de Galois de ce revêtement, et on a ${\rm Aut}(B_{\rm Kum}/B) = G_B/H_{\rm Kum} \cong \mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}})$. Comme ci-dessus, l'action naturelle de $\mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}})$ sur $\mathscr{O}(B_{\mathrm{Kum}})$ s'étend en une action de $\mathbb{U}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, avec $\gamma_u^* q^i = e_{\mathbf{A}}(u) q^i$ si $u \in \mathbf{A}^{]\infty[}$ et $i \in \mathbf{Q}_+$.

8.1.2. La cohomologie de la boule unité perfectoïde. — Notons $\mathscr{O}^\flat$ le basculé de $C\langle q^{p^{-\infty}}\rangle$; on a donc $\mathscr{O}^\flat = C^\flat\langle \tilde{q}^{p^{-\infty}}\rangle$ (en notant $\tilde{q}$ l'élément $(q, q^{1/p}, ...)$ de $\mathscr{O}^\flat$). Maintenant, tout élément de $\widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty) = W(\mathscr{O}^\flat)$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $\sum_{i\in I} a_i \tilde{q}^i$, avec $a_i \in \widetilde{\mathbf{A}}$ et $a_i \to 0$ quand $i \to \infty$ (i.e. pour tous n, k il n'y a qu'un nombre fini de i tels que $a_i \notin p^n \widetilde{\mathbf{A}} + \tilde{p}^k \widetilde{\mathbf{A}}^+$). On décompose I sous la forme

$$I = \{0\} \sqcup (\sqcup_{k\in\mathbf{Z}} I_k), \quad \text{avec } I_k = \{p^k a,\ a \in \mathbf{N}, (a,p) = 1\}.$$

De même, notons $\mathscr{O}^\flat_{\mathrm{Kum}}$ le basculé de $C\langle q^{\mathbf{Q}_+}\rangle$; on a donc $\mathscr{O}^\flat_{\mathrm{Kum}} = C^\flat\langle \tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}\rangle$. Tout élément de $\widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}}) = W(\mathscr{O}^\flat_{\mathrm{Kum}})$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $\sum_{i\in\mathbf{Q}_+} a_i \tilde{q}^i$, avec $a_i \in \widetilde{\mathbf{A}}$ et $a_i \to 0$ quand $i \to \infty$. On décompose $\mathbf{Q}_+$ sous la forme

$$\mathbf{Q}_+ = \{0\} \sqcup (\sqcup_{k\in\mathbf{Z}} I_{\mathrm{Kum},k}), \quad \text{avec } I_{\mathrm{Kum},k} = \{x \in \mathbf{Q}_+,\ v_p(x) = k\}.$$

Proposition 8.1. — (i) *On a des isomorphismes naturels :*

$$H^1_{\text{proét}}(B_{\mathrm{Kum}}, \mathbf{Z}_p) \cong H^1(H_{\mathrm{Kum}}, \mathbf{Z}_p) \cong \widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}})/(\varphi - 1)$$
$$H^1_{\text{proét}}(B_\infty^\times, \mathbf{Z}_p) \cong H^1(H_B, \mathbf{Z}_p) \cong \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)/(\varphi - 1)$$

(ii) *Les applications naturelles*

$$\widehat{\oplus}_{i\in I_{\mathrm{Kum},0}} \widetilde{\mathbf{A}} \tilde{q}^i \to \widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}})/(\varphi - 1) \quad \text{et} \quad \widehat{\oplus}_{i\in I_0} \widetilde{\mathbf{A}} \tilde{q}^i \to \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)/(\varphi - 1)$$

induisent des isomorphismes

$$\widehat{\oplus}_{i\in I_{\mathrm{Kum},0}} (\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^{++}) \tilde{q}^i \cong \widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}})/(\varphi - 1) \quad \text{et} \quad \widehat{\oplus}_{i\in I_0} (\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^{++}) \tilde{q}^i \cong \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)/(\varphi - 1)$$

Démonstration. — Pour B_{Kum}, le (i) est un cas particulier des résultats de [**61**]. Le cas de $B_\infty^\times$ s'en déduit en utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre pour le revêtement $B_{\mathrm{Kum}}/B_\infty$ (de groupe de Galois $\mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$ dont le "cardinal" est premier à p) qui fournit un isomorphisme $H^1_{\text{proét}}(B_\infty^\times, \mathbf{Z}_p) = H^0(\mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[}), H^1_{\text{proét}}(B_{\mathrm{Kum}}, \mathbf{Z}_p))$: comme $\mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$ est de "cardinal" premier à p, les points fixes sous $\mathbb{U}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$ de la suite exacte $0 \to \widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}}) \xrightarrow{\varphi-1} \widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}}) \to \widetilde{\mathbb{A}}(B_{\mathrm{Kum}})/(\varphi - 1) \to 0$ forment encore une suite exacte (c'est aussi visible sur la description du (ii)).

Passons au (ii) ; la preuve est la même dans les deux cas, et nous ne traiterons que le cas de B_∞. Il s'agit de prouver que $\widehat{\oplus}_{i\in I_0} \widetilde{\mathbf{A}} \tilde{q}^i \to \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)/(\varphi - 1)$ est surjective et que le noyau est $\widehat{\oplus}_{i\in I_0} \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \tilde{q}^i$.

Commençons par la surjectivité. Soit $z = \sum_{i\in I} a_i \tilde{q}^i$ comme ci-dessus.

• Comme $1 - \varphi$ est surjectif sur $\widetilde{\mathbf{A}}$, on peut supposer $a_0 = 0$.

• On peut écrire $a_i = \sum p^n [a_{i,n}]$. Or, si $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, alors $y = [x]\tilde{q}^i$ est dans l'image de $1-\varphi$ car la série $y + \varphi(y) + \varphi^2(y) + \cdots$ converge. Comme on travaille modulo $1-\varphi$, on peut supprimer tous les $[a_{i,n}]\tilde{q}^i$ avec $a_{i,n} \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$. Il ne reste alors, modulo p^N, qu'un nombre fini de $a_{i,n}$ non nuls.

• On a $[a_{i,n}]\tilde{q}^i = [a_{i,n}^{p^j}]\tilde{q}^{ip^j}$ modulo $1-\varphi$ et il existe un $j \in \mathbf{Z}$ (unique) tel que $ip^j \in I_0$.

On en déduit la surjectivité et le fait que le noyau contient $\widehat{\oplus}_{i\in I_0}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}\tilde{q}^i$. Pour conclure, il suffit donc de vérifier que

$$\big(\widehat{\oplus}_{i\in I_0}\widetilde{\mathbf{A}}\tilde{q}^i\big) \cap \big((\varphi-1)\cdot\widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)\big) \subset \widehat{\oplus}_{i\in I_0}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}\tilde{q}^i.$$

On se ramène à vérifier le même énoncé modulo p. Soit $z \in \mathscr{O}^\flat$ tel que $(\varphi-1)z \in \oplus_{i\in I_0}C^\flat\tilde{q}^i$. On écrit $z = \sum_{i\in I} a_i\tilde{q}^i$ et $(\varphi-1)z = \sum_{i\in I} b_i\tilde{q}^i$. Supposons, par l'absurde, qu'au moins un des a_i n'appartient pas à $\mathfrak{m}_{C^\flat}$, et choisissons i_1 (resp. i_2) tel que $v_p(i_1)$ (resp. $v_p(i_2)$) réalise le minimum (resp. maximum) des $v_p(i)$ pour i tel que $a_i \notin \mathfrak{m}_{C^\flat}$. Alors au moins une des deux propriétés suivantes est vérifiée : $v_p(i_1) < 0$ ou $v_p(i_2) \geq 0$. Dans le premier cas, $b_{i_1} = a_{i_1/p}^p - a_{i_1} \equiv -a_{i_1} \bmod \mathfrak{m}_{C^\flat}$; dans le second, $b_{pi_2} = a_{i_2}^p - a_{pi_2} \equiv a_{i_2}^p \bmod \mathfrak{m}_{C^\flat}$. Dans les deux cas, cela fabrique un b_i, avec $i \notin I_0$, tel que $b_i \neq 0$, et donc $(\varphi-1)z \notin \oplus_{i\in I_0}C^\flat\tilde{q}^i$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

On en déduit le résultat. □

Remarque 8.2. — Pour construire le second isomorphisme du (i), on part de la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_p \to \widetilde{\mathbb{A}}(\overline{B}) \xrightarrow{\varphi-1} \widetilde{\mathbb{A}}(\overline{B}) \to 0$, et on prend la cohomologie continue de H_B qui, par descente presque étale, nous donne une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty) \xrightarrow{\varphi-1} \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty) \to H^1(H_B, \mathbf{Z}_p) \to 0.$$

En particulier, si $x \in \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)$ le 1-cocycle associé est $\tau \mapsto (\tau-1)\cdot c$, où $c \in \widetilde{\mathbb{A}}(\overline{B})$ vérifie $(\varphi-1)\cdot c = x$.

8.1.3. Descente en niveau fini. — On note Alg l'espace des fonctions polynomiales sur $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$ (une telle fonction est de la forme $\phi(\gamma_u) = \sum_{i=0}^k a_i\binom{u}{i}$). On fait agir $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ par $\big(g\cdot\phi\big)(x) = \phi(g^{-1}x)$; via l'isomorphisme avec $\mathbf{Z}_p$, cette formule devient $\big(\gamma_u\cdot\phi\big)(\gamma_x) = \phi(\gamma_{x-u})$. On note $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$, à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. On note $W_k \subset$ Alg l'espace des polynômes de degré $\leq k$; c'est une sous-$\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-représentation de Alg et

$$\mathrm{Alg} = \varinjlim W_k.$$

On a une suite exacte de $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-représentations :

$$0 \to W_k \to \mathscr{C} \xrightarrow{(\gamma-1)^k} \mathscr{C} \to 0.$$

Si M est un $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-module, on note $M^{U-\mathrm{fini}}$ l'ensemble des $x \in M$ tués par une puissance de $\gamma - 1$. En particulier, $\mathrm{Alg} = \mathscr{C}^{U-\mathrm{fini}}$.

Comme $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ est un quotient de G_B, on peut voir Alg et les W_k comme des systèmes locaux proétales sur $B^\times$.

Proposition 8.3. — *On a des isomorphismes*

$$H^1_{\mathrm{proét}}(B^\times, \mathrm{Alg}) \cong H^1(G_B, \mathrm{Alg}), \quad H^1_{\mathrm{proét}}(B^\times, W_k) \cong H^1(G_B, W_k).$$

Lemme 8.4. — *L'application qui, à un* 1*-cocycle* $\tau \mapsto \phi_\tau$*, associe* $\tau \mapsto \phi_\tau(0)$ *induit des isomorphismes*

$$H^1(H_B, \mathbf{Z}_p) = H^1(G_B, \mathscr{C}) \quad \text{et} \quad H^1(H_B, \mathbf{Z}_p)^{U-\text{fini}} = H^1(G_B, \mathrm{Alg}).$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme est le lemme de Shapiro. Le second résulte de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte ci-dessus : comme $H^0(G_B, W_k) = H^0(G_B, \mathscr{C})$ est l'espace des fonctions constantes, cette suite fournit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}_p \to H^1(G_B, W_k) \to H^1(G_B, \mathscr{C})^{(\gamma-1)^k=0} \to 0. \tag{8.5}$$

Le $\mathbf{Z}_p$ est tué dans $H^1(G_B, W_{k+1})$ car l'image de $x \in \mathbf{Z}_p$ dans $H^1(G_B, W_k)$ est celle du cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot \phi_x$, où $(\gamma - 1)^k \cdot \phi_x = x$, et donc ϕ_x est un polynôme de degré $\leq k + 1$, i.e. $\phi_x \in W_{k+1}$. Le résultat s'en déduit. □

Soit $W = W_k$. Soit $\tau \mapsto c_\tau$ un 1-cocycle sur G_B, à valeurs dans W.

Proposition 8.6. — *Il existe*

$$c \in ([\varepsilon^{1/p}] - 1)^{-k} \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(\overline{B}) \otimes W, \quad x \in \widetilde{\mathbb{A}}^{+}(\mathscr{O}(B_\infty)) \otimes W,$$

tels que

$$(\varphi - 1)c \in (\widehat{\oplus}_{i \in I_0} ([\varepsilon] - 1)^{-k} \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \tilde{q}^i) \otimes W \quad \text{et} \quad c_\tau = \tfrac{\tau-1}{\gamma-1} x + (\tau - 1)c.$$

Démonstration. — On peut écrire c_τ sous la forme $\sum_{i=0}^k c_{i,\tau} \otimes u^i$. La restriction de $\tau \mapsto c_{i,\tau}$ à H_B est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. Il existe $c_i \in \widetilde{\mathbb{A}}(\overline{B})$ tel que $c_{i,\tau} = (\tau - 1)c_i$ si $\tau \in H_B$. Il s'ensuit que $(\tau - 1) \cdot (\varphi - 1)c_i = 0$ et donc $(\varphi - 1)c_i \in \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)$. L'isomorphisme de la prop. 8.1 permet, quitte à retrancher $(\varphi-1)a_i$ à c_i, avec $a_i \in \widetilde{\mathbb{A}}(B_\infty)$ de supposer que $(\varphi - 1)c_i \in \widehat{\oplus}_{i \in I_0} \widetilde{\mathbf{A}} \tilde{q}^i$. Le fait que la classe de $\tau \mapsto c_{i,\tau}$ est tuée par $\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\big)^k$ (cela suit de la suite exacte (8.5)) équivaut à ce que

$$(\varphi - 1)c_i \in \widehat{\oplus}_{i \in I_0} ([\varepsilon^i] - 1)^{-k} \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \tilde{q}^i = \widehat{\oplus}_{i \in I_0} ([\varepsilon] - 1)^{-k} \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \tilde{q}^i.$$

Il résulte du lemme 8.7 ci-dessous que

$$c_i \in ([\varepsilon^{1/p}] - 1)^{-k} \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(\overline{B}).$$

Soit $c = \sum_{i=1}^k c_i \otimes u^i$. Alors, par construction c vérifie les propriétés demandées ; il reste à construire x. La classe de $\tau \mapsto c_\tau$ dans $H^1(H_B, W)$ est invariante par G_B (agissant par $(\gamma \cdot c)_\tau = \gamma \cdot c_{\gamma^{-1}\tau\gamma}$) puisque c'est la restriction d'un 1-cocycle sur G_B (explicitement, $\gamma \cdot c_{\gamma^{-1}\tau\gamma} = c_\tau + (\tau - 1) \cdot c_\gamma$). Cette classe est déterminée par $(\varphi - 1) \cdot c$ modulo $\widehat{\oplus}_{i \in I_0} \widetilde{\mathbf{A}}^{++} \tilde{q}^i \subset \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty)$ d'après le (ii) de la prop. 8.1 ; on en déduit que $(\sigma - 1)(\varphi - 1)c \in \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty) \otimes W$, pour tout $\sigma \in G_B$. Il en résulte, puisque $\varphi - 1$ est bijectif sur $\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty)$ (d'inverse $-1 - \varphi - \varphi^2 - \cdots$), que

$$(\sigma - 1) \cdot c \in (\mathbf{Z}_p \oplus \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty)) \otimes W, \quad \text{pour tout } \sigma \in G_B.$$

Soit $y = (\varphi - 1)c \in \frac{1}{([\varepsilon]-1)^k}\widetilde{\mathbb{A}}^+(B_\infty)$. Alors $(\gamma - 1)y \in (\mathbf{Z}_p \oplus \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty)) \otimes W$ d'après ce qui précède, et comme $\varphi - 1$ est bijectif sur $\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty)$, il existe $x_0 \in (W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_\infty)) \otimes W$ (unique à W près), tel que $(\gamma-1)y + (\varphi-1)x_0 = 0$. Alors $\tau \mapsto \frac{\tau-1}{\gamma-1}x_0 + (\tau - 1)c$ est un 1-cocycle sur G_B, tué par $\varphi - 1$ et donc à valeurs dans W, qui coïncide avec $\tau \mapsto c_\tau$ sur H_B. Le cocycle $c_\tau - (\frac{\tau-1}{\gamma-1}x_0 + (\tau-1)c)$ provient donc, par inflation, d'un 1-cocycle $\sigma \mapsto x_\sigma$ sur $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$, à valeurs dans W. Il suffit alors de poser $x = x_0 + x_\gamma$ pour conclure. □

Lemme 8.7. — *Si*

$$(\varphi - 1)x = ([\varepsilon] - 1)^{-k} z, \quad \textit{avec } z \in \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(\overline{B}),$$

alors

$$x = ([\varepsilon^{1/p}] - 1)^{-k} y, \quad \textit{avec } y \in \widetilde{\mathbb{A}}^{++}(\overline{B}).$$

Démonstration. — L'équation devient $\varphi(y) - \xi^k y = z$, avec $\xi = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1} \in \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$. Modulo p, cette équation devient $y_0^p - \alpha y_0 = z_0$, et comme $z_0 \in \mathscr{O}^{++}(\overline{B})^\flat$ et $\alpha \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, on a $y_0 \in \mathscr{O}^{++}(\overline{B})^\flat$ (car $v(y_0) > 0$ pour toute valuation sur $\mathscr{O}(\overline{B})^\flat$). On peut donc écrire $y = [y_0] + py'$ et recommencer le raisonnement avec y', etc. Cela permet de prouver que $y = [y_0] + p[y_1] + p^2[y_2] + \cdots$, avec $y_i \in \mathscr{O}^{++}(\overline{B})^\flat$, ce qui permet de conclure. □

8.2. Cohomologie de la boule ouverte

On suppose C sphériquement complet pour que $C/\mathscr{O}_C \to \varprojlim_{r>0} C/p^{-r}\mathscr{O}_C$ soit un isomorphisme, ce qui implique en particulier que l'on a des isomorphismes

$$\varprojlim_{r>0} \widetilde{\mathbf{A}}/\tilde{p}^{-r}\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^+ := \widetilde{\mathbf{A}}^-, \quad \varprojlim_{r>0} \tfrac{1}{\tilde{p}^{ir}([\varepsilon]-1)^k}\widetilde{\mathbf{A}}^+/\tfrac{1}{\tilde{p}^{ir}}\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \tfrac{1}{([\varepsilon]-1)^k}\widetilde{\mathbf{A}}^+/\widetilde{\mathbf{A}}^+.$$

Soient B^- la boule unité ouverte et B^-_∞ la boule unité ouverte perfectoïde. Ce sont les réunions croissantes, pour $r > 0$, des boules fermées (resp. fermées perfectoïdes)

$$B_r = \mathrm{Spa}(C\langle(q/p^r)\rangle, \mathscr{O}_C\langle(q/p^r)\rangle), \quad B_{r,\infty} = \mathrm{Spa}(C\langle(q/p^r)^{p^{-\infty}}\rangle, \mathscr{O}_C\langle(q/p^r)^{p^{-\infty}}\rangle).$$

On note $B^{-,\times}$ et $B^{-,\times}_\infty$ les boules B^- et B^-_∞ munies d'une structure logarithmique en 0.

Les H^0 n'ayant pas de $\mathrm{R}^1\varprojlim$, on a $H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times}_\infty, \mathbf{Z}_p) = \varprojlim_{r>0} H^1_{\mathrm{proét}}(B^\times_{r,\infty}, \mathbf{Z}_p)$, et comme $\widetilde{\mathbf{A}}^- \to \varprojlim \widetilde{\mathbf{A}}/(\tilde{p}^{-r}\widetilde{\mathbf{A}}^{++})$ est un isomorphisme, on obtient, grâce à la prop. 8.1, une injection naturelle

$$\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}} : H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times}_\infty, \mathbf{Z}_p) \hookrightarrow \prod_{i \in I_0} \widetilde{\mathbf{A}}^- \, \tilde{q}^i. \tag{8.8}$$

On peut voir Alg comme un ind-système local sur B^-, puisque c'est un ind-système local sur B_r, pour tout $r>0$. On a des isomorphismes

$$\begin{aligned} H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times},\text{Alg}) &= \varinjlim\nolimits_k \varprojlim\nolimits_r H^1_{\text{proét}}(B_r^\times, W_k) \\ &= \varinjlim\nolimits_k \varprojlim\nolimits_r H^1(G_{B_r}, W_k) \cong \varinjlim\nolimits_k \varprojlim\nolimits_r H^1(H_{B_r}, \mathbf{Z}_p)^{(\gamma-1)^k=0} \end{aligned}$$

Comme $H^1(H_{B_r},\mathbf{Z}_p)^{(\gamma-1)^k=0} \cong \widehat{\oplus}_{i\in I_0}(([\varepsilon]-1)^{-k}\tilde{p}^{-ir}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}/\tilde{p}^{-ir}\widetilde{\mathbf{A}}^{++})\tilde{q}^i$, et comme $\varprojlim(([\varepsilon]-1)^{-k}\tilde{p}^{-ir}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}/\tilde{p}^{-ir}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}) = ([\varepsilon]-1)^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^{+}/\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, on en déduit une injection naturelle

$$\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}} : H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times},\text{Alg}) \hookrightarrow \varinjlim_k \prod_{i\in I_0}(([\varepsilon]-1)^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^{+}/\widetilde{\mathbf{A}}^{+})\tilde{q}^i. \tag{8.9}$$

8.3. La cohomologie du faisceau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$

8.3.1. Descente presque étale et décomplétion. — On note $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}$ l'anneau des $\sum a_i\tilde{q}^i$, avec $i\in\mathbf{N}$, $a_i\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et, pour tout k et tout $r>0$, on a $v_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k}(a_i)+ir\to+\infty$ quand $i\to\infty$.

On note $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}$ l'anneau des $\sum a_i\tilde{q}^i$, avec $i\in p^{-\infty}\mathbf{N}$, $a_i\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et, pour tout k et tout $r>0$, on a $v_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k}(a_i)+ir\to+\infty$ quand $i\to\infty$ (suivant le filtre des complémentaires des parties finies). Alors $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}$ est le complété de $\varinjlim_n \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}^{1/p^n}\}$, et

$$\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B^-_\infty) = \varprojlim_r \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B_{r,\infty}) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}.$$

Lemme 8.10. — *On a un isomorphisme naturel*

$$H^1_{\text{proet}}(B^{-,\times},\text{Alg}\otimes\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) \cong H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\text{Alg}\otimes\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}).$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} H^1_{\text{proet}}(B^{-,\times},\text{Alg}\otimes\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) &\cong \varprojlim_r H^1_{\text{proet}}(B_r^\times,\text{Alg}\otimes\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}) \\ &\cong \varprojlim_r H^1(G_{B_r},\text{Alg}\otimes\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\overline{B}_r)) \\ &\cong \varprojlim_r H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\text{Alg}\otimes\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B_{r,\infty})) \\ &\cong H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\text{Alg}\otimes\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}) \end{aligned}$$

le premier isomorphisme résulte de ce que les H^0 vérifient la propriété de Mittag-Leffler, le second provient de ce que les $B_r^\times$ sont des $K(\pi,1)$, le troisième est une application directe des méthodes de descente presque étale, et le dernier provient de ce que les $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B_{r,\infty})$ n'ont pas de $\mathrm{R}^1\varprojlim$ car $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B_{r,\infty})$ est dense dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B_{s,\infty})$ si $r<s$ (Mittag-Leffler topologique). □

Si $P\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes\text{Alg}$ et si $k\in\mathbf{N}$, soit $P^{[k]}=(\gamma-1)^kP$. On a $P^{[k]}=0$ si $k\geq\deg P$. Un calcul immédiat fournit le lemme suivant.

Lemme 8.11. — *Si $i \in p^{-\infty}\mathbf{N} \setminus \{0\}$, on a*

$$\tilde{q}^i \otimes P = (\gamma - 1) \cdot \big(\tilde{q}^i \otimes \big(\tfrac{1}{[\varepsilon^i]-1} P + \tfrac{[\varepsilon^i]}{([\varepsilon^i]-1)^2} P^{[1]} + \tfrac{[\varepsilon^i]^2}{([\varepsilon^i]-1)^3} P^{[2]} + \cdots\big)\big)$$

Lemme 8.12. — *L'injection $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}$ induit un isomorphisme*

$$H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\} \otimes \mathrm{Alg}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\} \otimes \mathrm{Alg}).$$

Démonstration. — Cela résulte facilement du lemme 8.11 et de la définition de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}^{1/p^\infty}\}$ □

8.3.2. L'application $\log_B$. — On pose

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\}[\tfrac{1}{t}] \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\}.$$

Lemme 8.13. — (i) *On a des identités*

$$H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathrm{Alg} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}) = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}, \quad H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathrm{Alg} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}) = 0$$

et une suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^- \to H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathrm{Alg} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}) \to H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathrm{Alg} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\}) \to 0$$

(ii) *L'application $P \mapsto P(0)$ induit un isomorphisme*

$$H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \mathrm{Alg} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}) \cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}.$$

Démonstration. — Le calcul de H^0 est immédiat ; celui du H^1 résulte du lemme 8.11 (en remarquant que $\frac{(it)^k}{([\varepsilon^i]-1)^k}$ est « entier » et donc que la série qui sort du lemme converge). La suite exacte s'en déduit via la suite exacte longue de cohomologie associée à $0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\} \to 0$ tensorisée par Alg. Ceci prouve le (i).

Pour prouver le (ii), il suffit de remarquer que si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}$, alors ϕ_x, définie par $\phi_x(\tau) = \tau \cdot x$, est un élément de $\mathrm{Alg} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}$, et que $x \mapsto \phi_x$ est inverse de $P \mapsto P(0)$. □

Soit

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}_0 = \{\sum_i a_i \tilde{q}^i \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}, \text{ avec } a_0 = 0\}.$$

On déduit de ce qui précède un isomorphisme naturel (réminiscent de l'inverse de l'exponentielle de Bloch-Kato)

$$\log_B : H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(B^{-,\times}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes \mathrm{Alg}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}_0.$$

8.3.3. Une loi de réciprocité explicite. — On pose

$$\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q]]\boxtimes \mathbf{Z}_p^* = \prod_{i\in I_0}\widetilde{\mathbf{A}}^-\tilde q^i$$
$$(\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q]]\boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U-\mathrm{fini}} = \varinjlim_k \prod_{i\in I_0}(([\varepsilon]-1)^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^+/\widetilde{\mathbf{A}}^+)\tilde q^i.$$

On dispose donc, d'après (8.9) d'une application naturelle

$$\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}} : H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times},\mathrm{Alg}) \to (\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q]]\boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U-\mathrm{fini}}.$$

Par ailleurs, si $\alpha\in([\varepsilon]-1)^{-k}\widetilde{\mathbf{A}}^+/\widetilde{\mathbf{A}}^+$, alors $\varphi^n(\alpha)=0$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-$ si $n<0$. Cela permet de définir une injection

$$\kappa_{\mathrm{dR}} : (\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q]]\boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U-\mathrm{fini}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde q\}_0,\quad x\mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}}\varphi^n(x).$$

(La série converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde q\}$ car $t^k\varphi^n(([\varepsilon]-1)^k\tilde q^i)\in p^{-nk}\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}\tilde q^{p^ni}$; on obtient une injection car, si $x\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est tel que $\varphi^n(x)\in t^k\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $n\geq 0$, alors $x\in([\varepsilon]-1)^k\widetilde{\mathbf{A}}^+$.) On en déduit une flèche

$$\kappa_{\mathrm{dR}}\circ\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}} : H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times},\mathrm{Alg}) \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde q\}_0$$

(Remarquons que $\kappa_{\mathrm{dR}}\circ(\varphi-1)=0$, ce qui fait que $\kappa_{\mathrm{dR}}\circ\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$ ne dépend pas du choix du représentant fait dans la définition de $\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$.)

Théorème 8.14. — $\log_B\circ\,\iota = \kappa_{\mathrm{dR}}\circ\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde q\}_0 \arrow[r, "\sim"] & H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde q\}_0\otimes\mathrm{Alg}) \arrow[r, "\sim"] & H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde q\}\otimes\mathrm{Alg}) \\
(\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q]]\boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U-\mathrm{fini}} \arrow[u, "\kappa_{\mathrm{dR}}"] & H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times},\mathrm{Alg}) \arrow[l, "\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}"'] \arrow[r, "\iota"] & H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times},\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes\mathrm{Alg}) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

(i.e. que les deux flèches $H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times},\mathrm{Alg})\to H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde q\}\otimes\mathrm{Alg})$ coïncident). Soit $\hat c\in H^1_{\mathrm{proét}}(B^{-,\times},\mathrm{Alg})$. D'après la prop. 8.6, il existe, pour tout $r>0$,

$$c_r\in\tfrac{1}{([\varepsilon^{1/p}]-1)^k}\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(\overline{B}_r)\otimes\mathrm{Alg},$$
$$y_r=(\varphi-1)c_r\in\tfrac{1}{([\varepsilon]-1)^k}\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_{r,\infty})\otimes\mathrm{Alg},$$
$$(\gamma-1)y_r\in\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_{r,\infty})\otimes\mathrm{Alg},$$
$$x_r\equiv(1+\varphi+\varphi^2+\cdots)(\gamma-1)y_r\in\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_{r,\infty})\otimes\mathrm{Alg}\bmod\mathrm{Alg}$$

tels que $\tau\mapsto c_{r,\tau}=\frac{\tau-1}{\gamma-1}x_r+(\tau-1)c_r$ est un 1-cocycle sur G_{B_r} représentant l'image de $\hat c$ dans $H^1(G_{B_r},\mathrm{Alg})$. Comme $\widetilde{\mathbb{A}}^{++}(B_{r,\infty})\subset\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty})$, on peut voir x_r comme un élément de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty})$, ce qui représente $\tau\mapsto\frac{\tau-1}{\gamma-1}x_r$ comme l'inflation d'un cocycle de $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty})\otimes\mathrm{Alg})$ qui est l'image de $\tau\mapsto c_{r,\tau}$ dans $H^1(G_B,\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{B}_r)\otimes\mathrm{Alg})$ (car $c_r\in\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{B}_r)\otimes\mathrm{Alg}$ puisque $[\varepsilon^{1/p}]-1$ est inversible dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$).

Dans l'autre sens, soit $z_r=(1+\varphi+\varphi^2+\cdots)y_r$ (la série $(1+\varphi+\varphi^2+\cdots)y_r$ converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}[[\tilde{q}/\tilde{p}^r]]\otimes\mathrm{Alg}$ et les coefficients sont dans $\cup_{n\in\mathbf{N}}\frac{1}{([\varepsilon^{p^n}]-1)^k}\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{\tilde{p}}]$ qui s'injecte dans $t^{-k}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$; la série qui en résulte converge dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}(B_{r,\infty}^-)\otimes\mathrm{Alg}$ mais pas, a priori, dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}(B_{r,\infty})\otimes\mathrm{Alg}$). L'image de $\hat{c}$ dans $(\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}/\tilde{p}^r]]\boxtimes\mathbf{Z}_p^*)^{U-\mathrm{fini}}$ est celle de $y_r(0)$ dont l'image par κ_{dR} est celle de $z_r(0)$. Son image dans $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty}^-)\otimes\mathrm{Alg})$ est celle de $\tau\mapsto(\tau-1)z_r$, et comme $x_r=(\gamma-1)z_r$, le cocycle précédent est aussi $\tau\mapsto\frac{\tau-1}{\gamma-1}x_r$.

Les deux flèches coïncident donc dans $\varprojlim_r H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty}^-)\otimes\mathrm{Alg})$ qui est égal à $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p),\varprojlim_r\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty}^-)\otimes\mathrm{Alg})$ pour les mêmes raisons de critère de Mittag-Leffler topologique que pour la preuve du lemme 8.10. Comme $\varprojlim_r\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_{r,\infty}^-)=\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B^-)=\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\}$, cela permet de conclure. □

Soit $W=W_k$. On voit W comme une représentation du groupe fondamental G_B de B^- via le morphisme $G_B\to\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$. La flèche $W\otimes W^*\to\mathrm{Alg}$ définie par $v\otimes\check{v}\mapsto\phi_{\check{v},v}$, avec $\phi_{\check{v},v}(x)=\langle x\cdot\check{v},v\rangle$, est $G_B\times\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-équivariante (en faisant agir G_B sur W et $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ sur W^*, et les deux sur Alg par la formule habituelle). Ceci fournit une flèche $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-équivariante

$$H^1(G_B,W)\otimes W^*\to H^1(G_B,\mathrm{Alg}).$$

Lemme 8.15. — *On suppose qu'il existe $c\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}\otimes W$ tel que $v_\tau=(\tau-1)\cdot c$ pour tout $\tau\in G_B$. Alors $\log_B(v\otimes\check{v})$ est l'image de $\langle\check{v},c\rangle$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}$.*

Démonstration. — Si $w=(\tau\mapsto w_\tau)$ est un 1-cocycle sur G_B, à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}\otimes W$, et si $\check{w}\in W^*$, alors $w\otimes\check{w}$ est représenté par le 1-cocycle $\tau\mapsto\phi_{\check{w},w_\tau}$, à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\{\tilde{q}\}\otimes\mathrm{Alg}$. Maintenant, $\phi_{\check{v},\tau\cdot c}=\tau\cdot\phi_{\check{v},c}$, et donc $v\otimes\check{v}$ est représenté par $\tau\mapsto(\tau-1)\cdot\phi_{\check{v},c}$. Par définition, $\log_B(v\otimes\check{v})$ est donc l'image de $\phi_{\check{v},c}(0)=\langle\check{v},c\rangle$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}$, ce que l'on voulait. □

8.4. La cohomologie du faisceau $\widehat{\mathscr{O}}$

Posons $U_0=\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$, $\gamma_u=\left(\begin{smallmatrix}1&u\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\gamma=\gamma_1$, et notons $\nu:U_0\to\mathbf{Z}_p$ le morphisme $\gamma_u\mapsto u$. On a $\mathscr{O}^+(B^-)=\mathscr{O}_C[[q]]$, $\mathscr{O}^+(B_\infty^-)=\mathscr{O}[[q^{1/p^\infty}]]$ et U_0 agit sur $\mathscr{O}^+(B_\infty^-)$ par $\gamma_u\cdot q^{1/p^n}=\zeta_{p^n}^u q^{1/p^n}$. On pose :

$$\mathscr{O}^+(B^{-,\times})=\mathscr{O}_C[[q]]_0,\quad \mathscr{O}^+(B_\infty^{-,\times})=\mathscr{O}[[q^{1/p^\infty}]]_0$$

le 0 en indice indiquant les séries dont le terme constant est 0. Si $X=B^-,B_\infty^-,B^{-,\times},B_\infty^{-,\times}$, on pose $\mathscr{O}^b(X)=C\otimes_{\mathscr{O}_C}\mathscr{O}^+(X)$; c'est l'espace des fonctions analytiques bornées sur X (de terme constant 0 dans le cas de $B^{-,\times},B_\infty^{-,\times}$). On note $\mathscr{O}(X)$ l'espace des fonctions analytiques (non nécessairement bornées).

On a $B^{-,\times}=B_\infty^{-,\times}/U_0$. Ceci se traduit par les identifications

$$\mathscr{O}(B_\infty^{-,\times})^{U_0}=\mathscr{O}(B^{-,\times}),\qquad \mathscr{O}(B_\infty^-)^{U_0}=\mathscr{O}(B^-),$$
$$\mathscr{O}^b(B_\infty^-)^{U_0}=\mathscr{O}^b(B^-),\qquad \mathscr{O}^b(B_\infty^{-,\times})^{U_0}=\mathscr{O}^b(B^{-,\times})$$

Comme U_0 est procyclique, on en déduit une suite exacte :

$$0 \to H^1(U_0, H^0_{\text{proét}}(B^{-,\times}_\infty, \widehat{\mathscr{O}})) \to H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \widehat{\mathscr{O}}) \to H^0(U_0, H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}_\infty, \widehat{\mathscr{O}})) \to 0$$

Maintenant, B^-_∞ est la réunion croissante de boules fermées perfectoïdes $\widetilde{B}_n$, pour lesquelles $H^1_{\text{proét}}(\widetilde{B}^\times_n, \widehat{\mathscr{O}}) = 0$ (puisque ce sont des affinoïdes perfectoïdes) et on a $\mathrm{R}^1 \lim \mathscr{O}(\widetilde{B}^\times_n) = 0$ car les $\widetilde{B}_n$ forment un recouvrement stein de B^-_∞ ; il s'ensuit que $H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}_\infty, \widehat{\mathscr{O}}) = 0$ et donc que l'on a un isomorphisme

$$H^1(U_0, H^0_{\text{proét}}(B^{-,\times}_\infty, \widehat{\mathscr{O}})) \cong H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \widehat{\mathscr{O}})$$

Nous allons donner deux descriptions de $H^1(U_0, \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty))$. Un élément de $H^1(U_0, \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty))$ est déterminé par un cocycle $\gamma_u \mapsto c_u$ et un tel cocycle est complètement déterminé par c_1 puisque $\mathbf{Z}_p$ est procyclique.

Lemme 8.16. — *$x \mapsto x \cup \nu$, où ν est vu comme élément de $H^1(U_0, \mathbf{Z}_p)$, induit des isomorphismes*

$$\cup\ \nu : \mathscr{O}^b(B^{-,\times}) = H^0(U_0, \mathscr{O}^b(B^{-,\times}_\infty)) \xrightarrow{\sim} H^1(U_0, \mathscr{O}^b(B^{-,\times}_\infty))$$
$$\cup\ \nu : \mathscr{O}(B^{-,\times}) = H^0(U_0, \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty)) \xrightarrow{\sim} H^1(U_0, \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty))$$

On note

$$\exp^*_B : H^1(U_0, \mathscr{O}^b(B^{-,\times}_\infty)) \to \mathscr{O}^b(B^{-,\times}), \quad \exp^*_B : H^1(U_0, \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty)) \to \mathscr{O}(B^{-,\times})$$

les isomorphismes réciproques (réminiscents de l'exponentielle duale de Bloch-Kato).

Démonstration. — C'est parfaitement classique. Plus précisément, le conoyau de $\mathscr{O}^+(B^{-,\times}) \to H^1(U_0, \mathscr{O}^+(B^{-,\times}_\infty))$ est tué par $\zeta_p - 1$. (Cela traite le cas de $\mathscr{O}^b$; celui de $\mathscr{O}$ s'en déduit en écrivant B_∞ comme une réunion croissante de boules plus petites et en passant à la limite.) □

Remarque 8.17. — Les isomorphismes ci-dessus ne sont pas équivariants : $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par $\varepsilon_p(\sigma)^{-1}$ sur ν car $\sigma \cdot \nu$ est le cocycle $u \mapsto \sigma(\nu(\sigma^{-1}u\sigma))$ où le produit se fait dans le groupe $\left(\begin{smallmatrix} G_{\mathbf{Q}_p} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} \sigma & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \tau & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \sigma\tau & u+\varepsilon_p(\sigma)v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit $\mathbb{B}_2(B^-_\infty) = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(B^-_\infty)/t^2$ (donc $\mathbb{B}_2(B^-_\infty)$ est constitué de séries en $\tilde{q}^{1/p^\infty}$ à coefficients dans $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2$, vérifiant des conditions de croissance). On note $\mathbb{B}_2(B^{-,\times}_\infty) \subset \mathbb{B}_2(B^-_\infty)$ les séries de terme constant 0.

Lemme 8.18. — *La suite exacte*

$$0 \to \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty) \to t^{-1}\mathbb{B}_2(B^{-,\times}_\infty) \to t^{-1}\mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty) \to 0$$

induit, en passant à la cohomologie de U_0, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^0(U_0, t^{-1}\mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(U_0, \mathscr{O}(B^{-,\times}_\infty)) \\ t^{-1}\mathscr{O}(B^{-,\times}) \arrow[r, "t\partial", "\sim"'] & \mathscr{O}(B^{-,\times}) \arrow[u, "\cup\nu", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme $\cup\,\nu$ *à droite est celui du lemme 8.16. Autrement dit, l'isomorphisme*

$$\log_B^0 : H^1(U_0, \mathscr{O}(B_\infty^{-,\times})) \xrightarrow{\sim} t^{-1}\mathscr{O}(B^{-,\times})$$

que l'on déduit, en passant par la gauche du diagramme, vérifie la relation

$$\log_B^0 = t^{-1}\partial^{-1} \circ \exp_B^*$$

Démonstration. — On a

$$(\gamma - 1) \cdot a\,\tilde{q}^i = ([\varepsilon^i] - 1)\,a\,\tilde{q}^i, \quad \text{si } a \in \mathbf{B}_2 \text{ et } i \in p^{-\infty}\mathbf{N}.$$

Si $i \neq 0$, ceci est 0 dans $\mathbf{B}_2$ si et seulement si $a = 0$ ou $i \in \mathbf{N}$ et $a \in t\mathbf{B}_2$. On en déduit que $H^0(U_0, t^{-1}\mathbb{B}_2(B_\infty^{-,\times})) = \mathscr{O}(B^{-,\times}) = H^0(U_0, \mathscr{O}(B_\infty^{-,\times}))$ ce qui fournit une injection $t^{-1}\mathscr{O}(B^{-,\times}) = H^0(U_0, t^{-1}\mathscr{O}(B_\infty^{-,\times})) \hookrightarrow H^1(U_0, \mathscr{O}(B_\infty^{-,\times}))$.

Si $x = t^{-1}\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\,q^n \in t^{-1}\mathscr{O}(B^{-,\times})$, si $\tilde{a}_n \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^2$ est un relèvement de a_n, alors l'image de x dans $H^1(U_0, \mathscr{O}(B_\infty^{-,\times}))$ est représentée par le 1-cocycle $\gamma_u \mapsto c_u = \theta((\gamma_u - 1) \cdot \tilde{x})$, avec $\tilde{x} = t^{-1}\sum_{n\in\mathbf{N}} \tilde{a}_n\tilde{q}^n$. Comme $\theta(t^{-1}([\varepsilon^n] - 1)) = n$, on obtient $c_1 = \sum_n n\,a_n\,q^n = t\,\partial x$.

Le résultat s'en déduit. □

Remarque 8.19. — (i) En reprenant les arguments du § 8.3 et en utilisant le fait que $\gamma - 1 : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\}_0 \to t\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\{\tilde{q}\}_0$ est un isomorphisme (d'inverse $\sum a_n\,t\tilde{q}^n \mapsto \sum a_n \frac{t}{[\varepsilon]^n - 1}\tilde{q}^n$), on voit que l'application naturelle

$$\theta : H^1(U_0, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_\infty^{-,\times})) \to H^1(U_0, \mathscr{O}(B_\infty^{-,\times}))$$

est un isomorphisme. On en déduit un diagramme commutatif (les flèches verticales sont obtenues en envoyant les fonctions constantes dans les fonctions polynomiales et la flèche de droite est induite par l'inclusion $t^{-1}C \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-$) :

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \mathbf{Z}_p) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dd] & H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \widehat{\mathscr{O}}) & H^1(U_0, \mathscr{O}(B_\infty^{-,\times})) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\log_B^0", "\sim"'] & t^{-1}C\{\tilde{q}\}_0 \arrow[dd] \\
 & & H^1(U_0, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_\infty^{-,\times})) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d] & \\
H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \mathrm{Alg}) \arrow[r, "\iota"] & H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes \mathrm{Alg}) & H^1(U_0, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(B_\infty^{-,\times}) \otimes \mathrm{Alg}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\log_B", "\sim"'] & \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}_0
\end{tikzcd}$$

(ii) On dispose d'un second diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \mathbf{Z}_p) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & H^1_{\text{proét}}(B_\infty^{-,\times}, \mathbf{Z}_p)^{U_0} \arrow[r, "\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}"] \arrow[d] & (\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U_0} \arrow[r, "\kappa_{\mathrm{dR}}"] \arrow[d] & t^{-1}C\{\tilde{q}\}_0 \arrow[d] \\
H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \mathrm{Alg}) \arrow[r, "\iota"] & H^1_{\text{proét}}(B_\infty^{-,\times}, \mathbf{Z}_p)^{U_0\text{-fini}} \arrow[r, "\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}"] & (\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U_0\text{-fini}} \arrow[r, "\kappa_{\mathrm{dR}}"] & \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^-\{\tilde{q}\}_0
\end{tikzcd}$$

Il résulte du th. 8.14 que les flèches $H^1_{\text{proét}}(B^{-,\times}, \mathbf{Z}_p) \to t^{-1}C\{\tilde{q}\}_0$ que l'on déduit des deux diagrammes ci-dessus coïncident.

9. Un modèle de Kirillov pour la cohomologie complétée

Dans ce chapitre, on définit un modèle de Kirillov pour $H^1_{\mathrm{proet}}(\widehat{X}(0)^{\times}_C, \mathscr{O}_L)$. L'injectivité de ce modèle est étudiée dans les chap. 10 et 11, et les conséquences de son injectivité au chap. 12 : compatibilité entre les correspondances de Langlands locales p-adique et classique (th. 12.6), conjecture de Fontaine-Mazur (th. 12.8), représentations ordinaires (prop. 12.7).

9.1. Cohomologie complétée et algèbres de Hecke

9.1.1. La tour complétée. — Si $(N,p)=1$, on note $X(Np^\infty)$ la limite projective des $X(Np^k)$, et $\widehat{X}(Np^\infty)$ sa complétée (qui est une courbe perfectoïde [**62, 67, 58**]).

On note $X(0)$ la limite projective des $X(N)$, $\widehat{X}^{(p)}(0)$ la limite projective des $\widehat{X}(Np^\infty)$, et $\widehat{X}(0)$ la complétée de $X(0)$ ($\widehat{X}^{(p)}(0)$ est seulement complétée le long de la tour de niveau p^∞).

On rajoute un C en indice (i.e. $X(N)_C$, $\widehat{X}^{(p)}(0)_C$, etc.) pour dénoter l'extension des scalaires à C. Il y a une subtilité dans cette opération dans le cas des tours complétées (cf. (ii) de la rem. 9.1 ci-dessous).

Remarque 9.1. — (i) Soit $F_\infty = \widehat{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}$. Alors $\mathrm{Aut}(F_\infty/\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Z}_p^*$, où $a \in \mathbf{Z}_p^*$ agit par σ_a avec $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$, si $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$. On dispose d'une application naturelle $\mathscr{F} : C\widehat{\otimes}F_\infty \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*, C)$, envoyant $x\otimes y$ sur $\phi_{x\otimes y}$ définie par $\phi_{x\otimes y}(a) = x\,\sigma_a(y)$. (La même formule induit un isomorphisme $C\otimes \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*, C)$.)

Fresnel et de Mathan [**34, 35, 36**] ont prouvé que $\mathscr{F}$ est surjective [20] et que le noyau [21] de $\mathscr{F}$ est l'adhérence des éléments nilpotents : on a donc envie de dire que $\mathrm{Spa}(C\widehat{\otimes}F_\infty)$ est un épaississement infinitésimal de $\mathbf{Z}_p^*$.

(ii) Le (i) impose de modifier l'extension des scalaires à C : il faut quotienter par l'adhérence des nilpotents, ce qui transforme $C\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_p(\mu_{Np^\infty})$ en $\mathscr{C}((\mathbf{Z}/Np^\infty)^*, C)$ (i.e. l'espace des composantes connexes de $\widehat{X}(Np^\infty)_C$ est $(\mathbf{Z}/Np^\infty)^*$ et pas un épaississement infinitésimal ; celui de $\widehat{X}(0)_C$ est $\widehat{\mathbf{Z}}^*$).

9.1.2. Le voisinage de la pointe ∞. — L'espace $\widehat{X}(0)$ est l'espace de modules des triplets (E, e_1^*, e_2^*), où E est une courbe elliptique et e_1^*, e_2^* est une base sur $\widehat{\mathbf{Z}}$ du module de Tate adélique $T_{\widehat{\mathbf{Z}}}E$ de E. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ sur $\widehat{X}(0)$ envoie (E, e_1^*, e_2^*) sur $(E, ae_1^* + ce_2^*, be_1^* + de_2^*)$.

On note $\widehat{Z}(0) \subset \widehat{X}(0)$ la composante connexe arithmétique du lieu multiplicatif paramétrant les (E, e_1^*, e_2^*), où $E \cong \mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, e_1^* est un générateur de $T_{\widehat{\mathbf{Z}}}\widehat{\mathbf{G}}_m$ et $e_2^* =$

20. Une preuve alternative a récemment été obtenue par Ophir [**49**].

21. Ce noyau n'est pas 0 ; cela peut se voir en regardant l'espace des vecteurs η-isotypiques, si $\eta : \mathbf{Z}_p^* \to C^*$ est un caractère continu : dans $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*, C)$, cet espace est de dimension 1 sur C, engendré par η, et dans $C\widehat{\otimes}F_\infty$ cet espace est 0 si η n'est pas d'ordre fini comme on le voit en utilisant les traces normalisées $T_n : F_\infty \to \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$.

$(q^{1/N})_N$ modulo $T_{\widehat{\mathbf{Z}}}\widehat{\mathbf{G}}_m$. Autrement dit, $\widehat{Z}(0)$ est le voisinage (arithmétique) usuel de la pointe ∞.

On définit de même $Z(Np^\infty) \subset X(Np^\infty)$, $\widehat{Z}(Np^\infty) \subset \widehat{X}(Np^\infty)$, etc. Alors $\mathscr{O}^+(\widehat{Z}(0))$ est le complété (p,q)-adique $\widehat{\mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}]}[[q^{\mathbf{Q}_+}]]$ de $\mathbf{Z}[\zeta_N, q^{1/N}, N \geq 1]$ tandis que $\mathscr{O}^+(\widehat{Z}^{(p)}(0))$ est la limite inductive pour $(N,p)=1$ des $\widehat{\mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{Np^\infty}]}[[q^{1/Np^\infty}]]$.

L'espace $\widehat{Z}(0) \subset \widehat{X}(0)$ est stable par $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \subset \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$; on a, si $i \in \mathbf{Q}_+$ et $\zeta \in \boldsymbol{\mu}$,

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \zeta = \zeta^u, \quad \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot q^i = q^i, \quad \text{si } u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*,\\
&\left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \zeta = \zeta, \quad \left(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot q^i = q^{i/n}, \quad \text{si } n \in \mathbf{Q}_+^*,\\
&\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \zeta = \zeta, \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot q^i = \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(bi) q^i, \quad \text{si } b \in \mathbf{A}^{]\infty[},
\end{aligned}$$

Remarque 9.2. — (i) Si $\lambda \in \mathscr{O}^+(\widehat{Z}(0))$, soit $\mathscr{K}_\lambda : \mathbf{A}^{]\infty[,*} \to \mathbf{Z}_p \widehat{\otimes} \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}]$ la fonction envoyant x sur le terme de degré 1 de $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \lambda$. Si $\lambda = \sum a_i q^i$, alors $\lambda - a_0 = \sum_{i>0} \mathscr{K}_\lambda(i) q^i$; autrement dit les données de λ et $\mathscr{K}_\lambda$ sont presque équivalentes.

(ii) Si $x = nu$, avec $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $n \in \mathbf{Q}_+^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \lambda = \sum \sigma_u(a_i) q^{i/n}$ et donc $\mathscr{K}_\lambda(nu) = \sigma_u(a_n)$. Il s'ensuit que $\mathscr{K}_\lambda(ux) = \sigma_u(\mathscr{K}_\lambda(x))$ pour tous $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $x \in \mathbf{A}^{]\infty[,*}$, et donc que

$$\mathscr{K}_\lambda \in \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{Z}_p \widehat{\otimes} \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}])^{\widehat{\mathbf{Z}}^*}$$

où on fait agir $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ par $(u\cdot\phi)(x) = \sigma_u(\phi(u^{-1}x))$, i.e. par $\sigma_u \otimes \left(\begin{smallmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ si on factorise $\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{Z}_p \widehat{\otimes} \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}])$ sous la forme $\mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}] \widehat{\otimes} \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{Z}_p)$.

(iii) Comme $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & bx \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} ax & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, le terme de degré 1 de $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \lambda$ est $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(bx)$ fois celui de $\left(\begin{smallmatrix} ax & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \lambda$ (notons que $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(bx) \in \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}]$), ce qui se traduit par

$$\mathscr{K}_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda} = \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(bx) \mathscr{K}_\lambda(ax)$$

Autrement dit, $\lambda \mapsto \mathscr{K}_\lambda$ *est un modèle de Kirillov*

$$\mathscr{K} : \mathscr{O}^+(\widehat{Z}(0))_0 \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathbf{Z}_p \widehat{\otimes} \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}])^{\widehat{\mathbf{Z}}^*} \tag{9.3}$$

où le 0 en indice indique les séries (en $q^{\mathbf{Q}_+}$) de terme constant nul.

(iv) On a $\partial(\sum_i a_i q^i) = \sum_i i a_i q^i$. On en déduit que $\mathscr{K}_{\partial\lambda}(nu) = n\sigma_u(a_n) = |nu|_{\mathbf{A}}^{-1} \mathscr{K}_\lambda(nu)$, et donc $\mathscr{K}_{\partial\lambda} = |\ |_{\mathbf{A}}^{-1} \mathscr{K}_\lambda$.

9.1.3. La cohomologie de la tour complétée. — On rajoute un $\times$ en exposant (e.g. $X(N)_C^\times$, $\widehat{Z}(Np^\infty)_C^\times$,...) pour indiquer que l'on met une structure logarithmique aux pointes (dans le cas des X) ou de 0 (dans le cas des Z). Cela a pour effet de permettre les revêtements profinis ramifiés en les points où il y a une structure logarithmique dans la définition de la cohomologie (pro)étale.

Alors $H^1_{\text{ét}}(\widehat{X}(0)_C^\times, \mathbf{Z}_p)$ est la cohomologie complétée de la tour (en tant que représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, c'est $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Z}_p)))$. Le groupe $H^1_{\text{ét}}(\widehat{X}(Np^\infty)_C^\times, \mathbf{Z}_p)$ est le sous-groupe $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty), \mathbf{Z}_p))$ des points fixes par $\Gamma(Np^\infty)$. Par comparaison, $H^1_{\text{ét}}(X(0)_C^\times, \mathbf{Z}_p)$ est la limite inductive des $H^1_{\text{ét}}(X(N)_C, \mathbf{Z}_p)$ (en tant que représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, c'est $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Z}_p)))$.

9.1.4. Algèbres de Hecke. — Soit $\mathbb{T}(N)$ la $\mathscr{O}_L$-algèbre de Hecke de niveau N (engendrée par les T_ℓ et les S_ℓ, pour $\ell \nmid pN$) et $\mathbb{T} = \varprojlim_N \mathbb{T}(N)$. Alors $\mathbb{T}$ est une algèbre commutative semi-locale, réduite, non noethérienne (mais limite projective d'algèbres noethériennes), qui agit fidèlement sur $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$. On peut donner une description de $\mathbb{T}$ via l'isomorphisme $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)) \cong H^1_{\text{ét}}(X(0)^\times_C, \mathscr{O}_L)$ et l'action de Galois sur ce dernier module :

Si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$, notons $s_{\mathbb{T}}(\sigma), s'_{\mathbb{T}}(\sigma), t_{\mathbb{T}}(\sigma) \in \operatorname{End}(H^1_{\text{ét}}(X(0)^\times_C, \mathscr{O}_L))$ les opérateurs

$$s_{\mathbb{T}}(\sigma) := \left(\begin{smallmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}(\sigma)^{-1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}(\sigma)^{-1} \end{smallmatrix}\right), \quad s'_{\mathbb{T}}(\sigma) := \boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma) s_{\mathbb{T}}(\sigma), \quad t_{\mathbb{T}}(\sigma) := \sigma + s'_{\mathbb{T}}(\sigma)\sigma^{-1}$$

(Dans la définition de $s_{\mathbb{T}}(\sigma)$, le membre de droite appartient à $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ et agit à travers l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ sur $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$.)

Proposition 9.4. — (i) $\mathbb{T}$ *est la sous-*$\mathscr{O}_L$*-algèbre de* $\operatorname{End}(H^1_{\text{ét}}(X(0)^\times_C, \mathscr{O}_L))$ *topologiquement engendrée par les images des* $s_{\mathbb{T}}(\sigma)$ *et* $t_{\mathbb{T}}(\sigma)$*, pour* $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$*.*

(ii) $\mathbb{T}$ *commute aux actions de* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ *et de* $G_{\mathbf{Q}}$*.*

Démonstration. — Si $\tilde{\sigma}_\ell \in G_{\mathbf{Q}}$ est un frobenius arithmétique en ℓ (i.e. un relèvement de $\sigma_\ell \in G_{\mathbf{Q}}^{\text{ab}}$) et si $(N, \ell) = 1$, les relations d'Eichler-Shimura se traduisent par les relations

$$s_{\mathbb{T}}(\tilde{\sigma}_\ell) = S_\ell \text{ et } t_{\mathbb{T}}(\tilde{\sigma}_\ell) = T_\ell \quad \text{dans } \operatorname{End}(H^1_{\text{ét}}(X(N)^\times_C, \mathscr{O}_L))$$

Par densité des frobenius, les images de $s_{\mathbb{T}}(\sigma), t_{\mathbb{T}}(\sigma)$ dans $\operatorname{End}(H^1_{\text{ét}}(X(N)^\times_C, \mathscr{O}_L))$ appartiennent à $\mathbb{T}(N)$, pour tout N, et $\mathbb{T}(N)$ est la sous-$\mathscr{O}_L$-algèbre de $\operatorname{End}(H^1_{\text{ét}}(X(N)^\times_C, \mathscr{O}_L))$ engendrée par les images des $s_{\mathbb{T}}(\sigma)$ et $t_{\mathbb{T}}(\sigma)$, pour $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$. Le (i) et la commutation à l'action de $G_{\mathbf{Q}}$ s'en déduisent par passage à la limite.

La commutation à l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ se déduit du (i) en remarquant que $s_{\mathbb{T}}(\sigma)$ commute à l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ puisqu'il est défini comme l'action d'un élément du centre de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, et que $t_{\mathbb{T}}(\sigma)$ aussi puisque l'action de $G_{\mathbf{Q}}$ commute à celle de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$. □

Remarque 9.5. — (i) D'après le cor. 4.19, le centre de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ (identifié à $\mathbf{A}^*$) agit sur $H^1_{\text{ét}}(X(0)^\times_C, \mathscr{O}_L)$ à travers $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^* \cong \widehat{\mathbf{Z}}^*$. Par construction, si $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, l'opérateur $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right)$ définit un élément de $\mathbb{T}$ si $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$. Il en résulte que le centre de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit par un caractère $\delta_{\mathbb{T}}$ à valeurs dans $\mathbb{T}^*$.

(ii) Par construction, $s_{\mathbb{T}}(\sigma) \in \mathbb{T}^*$ si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$, et $s_{\mathbb{T}} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbb{T}^*$ est le caractère qui correspond à $\delta_{\mathbb{T}}$ par la théorie du corps de classes (cf. n$^{\text{o}}$ 1.1.6), i.e. $s_{\mathbb{T}}(\sigma) = \delta_{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}(\sigma))$ pour tout $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$. Le caractère $s'_{\mathbb{T}} : G_{\mathbf{Q}} \to \mathbb{T}^*$ correspond à $x \mapsto (x_p|x_p|_p)\delta_{\mathbb{T}}(x)$.

(iii) $\sigma \mapsto t_{\mathbb{T}}(\sigma)$ est un pseudo-caractère de $G_{\mathbf{Q}}$, de dimension 2, à valeurs dans $\mathbb{T}$, de déterminant $\sigma \mapsto s'_{\mathbb{T}}(\sigma)$. Par définition de $t_{\mathbb{T}}(\sigma)$, on a

$$\sigma^2 - t_{\mathbb{T}}(\sigma)\sigma + s'_{\mathbb{T}}(\sigma) = 0 \quad \text{dans } \operatorname{End}(H^1_{\text{ét}}(X(0)^\times_C, \mathscr{O}_L)).$$

Remarque 9.6. — Le pseudo-caractère $t_{\mathbb T}$ est impair ($t_{\mathbb T}(\sigma)=0$ si σ est une conjugaison complexe) et il ressort de la conjecture de Serre prouvée par Khare et Wintenberger et des théorèmes big $R=$ big T que (au moins en localisant en un idéal maximal de $\mathbb T$ générique) c'est le pseudo-caractère universel avec les propriétés ci-dessus.

De manière équivalente, si $t^{\rm univ}:G_{\mathbf Q}\to R^{\rm univ}$ est le pseudo-caractère de dimension 2, impair, universel, il existe un unique morphisme $\alpha:R^{\rm univ}\to\mathbb T$ tel que $t_{\mathbb T}=\alpha\circ t^{\rm univ}$, et α est un isomorphisme (après localisation en un idéal maximal générique).

9.2. Modèle de Kirillov des fonctions

Fixons $\iota:\mathbf Z[\boldsymbol\mu]\to C$.

Remarque 9.7. — D'après la rem. 9.1, on a une surjection $C\widehat\otimes\mathbf Z[\boldsymbol\mu]\to\mathscr C(\widehat{\mathbf Z}^*,C)$, envoyant $\alpha\otimes v$ sur $\phi_{\alpha\otimes v}(x)=\alpha\iota(\sigma_x(v))$.

(i) Si on fait agir $u\in\widehat{\mathbf Z}^*$ par $1\otimes\sigma_u$ sur $C\otimes\mathbf Z[\boldsymbol\mu]$, l'action qui s'en déduit sur $\mathscr C(\widehat{\mathbf Z}^*,C)$ est $\big([u]\cdot\phi\big)(x)=\phi(xu)$.

(ii) Si on fait agir $\sigma\in G_{\mathbf Q_p}$ par $\sigma\otimes 1$ sur $C\otimes\mathbf Z[\boldsymbol\mu]$, l'action qui s'en déduit sur $\mathscr C(\widehat{\mathbf Z}^*,C)$ est $\big(\sigma\cdot\phi\big)(x)=\sigma(\phi(\boldsymbol\varepsilon_{\mathbf A}(\sigma)^{-1}x))$; autrement dit c'est $\sigma\otimes[\boldsymbol\varepsilon_{\mathbf A}(\sigma)]^{-1}$ dans la factorisation $\mathscr C(\widehat{\mathbf Z}^*,C)=C\widehat\otimes\mathscr C(\widehat{\mathbf Z}^*,\mathbf Q_p)$.

On peut étendre $\mathscr K$ (cf. (9.3)) par C-linéarité en une application $\mathbb P(\mathbf A^{]\infty[})$-équivariante
$$C\otimes\mathscr K: C\widehat\otimes\mathscr O^+(\widehat Z(0))_0\to\mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*},C\widehat\otimes\mathbf Z[\boldsymbol\mu])^{\widehat{\mathbf Z}^*}$$
On la rend $\mathbb P(\mathbf A^{]\infty[})\times G_{\mathbf Q_p}$-équivariante en faisant agir $G_{\mathbf Q_p}$ sur C. En utilisant $\iota:\mathbf Z[\boldsymbol\mu]\to C$ comme dans la rem. 9.7, on en déduit un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd}
C\widehat\otimes\mathscr O^+(\widehat Z(0))_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*},C\widehat\otimes\mathbf Z[\boldsymbol\mu])^{\widehat{\mathbf Z}^*} \arrow[d] & \\
\mathscr O^b(\widehat Z(0)_C)_0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*}\times\widehat{\mathbf Z}^*,C)^{\widehat{\mathbf Z}^*} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*},C) \\
\mathscr O^b(\widehat Z(0)^0_C\times\widehat{\mathbf Z}^*)_0 \arrow[d, "\wr"] & & \\
C\otimes_{\mathscr O_C}\mathscr C(\widehat{\mathbf Z}^*,\mathscr O_C[[q^{\mathbf Q_+}]]_0) \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$
$\mathbb P(\mathbf A^{]\infty[})\times G_{\mathbf Q_p}$-équivariant, l'action de $\mathbb P(\mathbf A^{]\infty[})$ sur $\mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*},C)$ étant donnée par :
$$\big(\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\big)\cdot\phi\big)(x)=\iota(\mathbf e_{\mathbf A}(bx))\phi(ax)$$

(On passe de la première ligne à la seconde en quotientant par l'adhérence des nilpotents, cf. rem. 9.1 ; l'invariance par $\widehat{\mathbf Z}^*$ pour $\phi^{(2)}\in\mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*}\times\widehat{\mathbf Z}^*,C)$ se traduit par $\phi^{(2)}(xu^{-1},yu)=\phi^{(2)}(x,y)$ pour tous $x\in\mathbf A^{]\infty[,*}$ et $u,y\in\widehat{\mathbf Z}^*$, et l'isomorphisme $\mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*}\times\widehat{\mathbf Z}^*,C)^{\widehat{\mathbf Z}^*}\cong\mathscr C(\mathbf A^{]\infty[,*},C)$ est $\phi^{(2)}(x,y)\mapsto\phi^{(1)}(x):=\phi^{(2)}(x,1)$, l'isomorphisme inverse étant $\phi^{(2)}(x,y) = \phi^{(1)}(xy,1)$. La flèche $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, C[[q^{\mathbf{Q}_+}]]_0) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, C)$ envoie $\sum_i \phi_i q^i$, où $\phi_i \in \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, C)$, sur $\phi : \mathbf{A}^{]\infty[,*} \to C$ définie par $\phi(ui) = \phi_i(u)$ si $i \in \mathbf{Q}_+^*$ et $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$.)

En résumé, on a le résultat suivant :

Proposition 9.8. — *L'application* $C\otimes\mathscr{K} : \mathscr{O}^b(\widehat{Z}(0)_C)_0 \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, C)$ *est un modèle de Kirillov* $G_{\mathbf{Q}_p}$*-équivariant.*

9.3. Modèle de Kirillov de la cohomologie

9.3.1. Pour $H^1_{\text{proét}}(\widehat{Z}(0)_C, \mathbf{Z}_p)$. — Soient

$$\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p} := W(\mathbf{Z}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})^\flat) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} := W(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})^\flat)$$

Soit aussi $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}}$ le caractère

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{]\infty[} \to (\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}^{]p[}]\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p})^*, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{e}^{]p[}(x^{]p[}) \otimes [\varepsilon^{x_p}]$$

Notons $\widetilde{\mathscr{O}}^+(\widehat{Z}(0))$ l'anneau $W(\mathscr{O}^+(\widehat{Z}(0))^\flat)$. Alors $\widetilde{\mathscr{O}}^+(\widehat{Z}(0))$ est un anneau de séries en $\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}^{]p[}]\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}$, et on rajoute un 0 en indice pour indiquer le sous-espace des séries de terme constant 0. L'action de $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ sur $\mathscr{O}^+(\widehat{Z}(0))$ en induit une sur $\widetilde{\mathscr{O}}^+(\widehat{Z}(0))$; de manière explicite :

- $\left(\begin{smallmatrix} n & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\sum a_i \tilde{q}^i\right) = \sum a_i \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}}(bi/n)\tilde{q}^{i/n}$, si $n \in \mathbf{Q}_+^*$ et $b \in \mathbf{A}^{]\infty[}$,
- $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\sum a_i \tilde{q}^i\right) = \sum \sigma_u(a_i)\tilde{q}^i$, si $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$.

On dispose de plus d'une action de φ, avec :

- $\varphi \cdot \left(\sum a_i \tilde{q}^i\right) = \sum \varphi(a_i)\tilde{q}^{pi}$.

Si $\widetilde{\mathscr{O}}(\widehat{Z}(0)_C) := W(\mathscr{O}(\widehat{Z}(0)_C)^\flat)$ et $\widetilde{\mathscr{O}}(B^-_{\text{Kum}}) := W(\mathscr{O}(B^-_{\text{Kum}})^\flat)$, alors $\widetilde{\mathscr{O}}(B^-_{\text{Kum}})$ est un anneau de séries en $\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}$ à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{A}}$, muni d'actions de $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et φ données par les formules ci-dessus à part pour le fait qu'il faut remplacer $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{]\infty[} \to \mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}^{]p[}]\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{A}}^+_{\mathbf{Q}_p}$ par $\iota\circ\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{]\infty[} \to \widetilde{\mathbf{A}}^+$ (le plongement $\iota : \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}] \to \mathscr{O}_C$ induit un plongement $\iota : \mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}^{]p[}] \to W(\overline{\mathbf{F}}_p) \subset \widetilde{\mathbf{A}}^+$). Alors

$$\widetilde{\mathscr{O}}(\widehat{Z}(0)_C) \cong \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, \widetilde{\mathscr{O}}(B^-_{\text{Kum}}))$$

comme $(\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})\times G_{\mathbf{Q}_p})$-module et cette identification commute à l'action de φ (l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\widetilde{\mathscr{O}}(\widehat{Z}(0)_C)$ est induite par celle sur $\mathscr{O}(\widehat{Z}(0)_C)$ qui, elle-même, est induite par celle sur C si on voit $\mathscr{O}(\widehat{Z}(0)_C)$ comme un quotient de $C\widehat{\otimes}\mathscr{O}(\widehat{Z}(0))$). Les mêmes formules que ci-dessus fournissent un modèle de Kirillov $\varphi\times G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant

$$\mathscr{K} : \widetilde{\mathscr{O}}(\widehat{Z}(0)_C) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \widetilde{\mathbf{A}})$$

les actions de $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, φ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur le membre de droite étant données par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi\right)(x) = \iota(\tilde{\mathbf{e}}_A(bx))\,\phi(ax), \quad (\sigma\cdot\phi)(x) = \sigma(\phi(\chi(\sigma)^{-1}x)), \quad (\varphi\cdot\phi)(x) = \varphi(\phi(p^{-1}x))$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1_{\text{proét}}(\widehat{Z}(0)_C, \mathbf{Z}_p) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \widetilde{\mathscr{O}}(\widehat{Z}(0)_C)/(\varphi-1) \arrow[d, "\wr"] & \\ \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, H^1_{\text{proét}}(B^-_{\text{Kum}}, \mathbf{Z}_p)) \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, \widetilde{\mathscr{O}}(B^-_{\text{Kum}})/(\varphi-1)) \arrow[r, "\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}"] & \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, \widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*) \end{tikzcd}$$

On en déduit une application

$$\mathscr{K}_H : H^1_{\text{proét}}(\widehat{Z}(0)_C, \mathbf{Z}_p) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \widetilde{\mathbf{A}}^-)$$

en composant avec l'application envoyant $\lambda \in \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, \widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$ sur $\mathscr{K}_\lambda$, où $\mathscr{K}_\lambda(x)$ est donnée, si $x = p^k nu$ (avec $u \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, $n \in \mathbf{Q}_+^*$, $v_p(n) = 0$), par la formule

$$\mathscr{K}_\lambda(x) = \varphi^k(\lambda_n(u)), \quad \text{si } \lambda(u, \tilde{q}) = \sum\nolimits_{i \in \mathbf{Q}_+^* \cap \mathbf{Z}_p^*} \lambda_i(u)\tilde{q}^i.$$

(En particulier, $\mathscr{K}_\lambda(px) = \varphi(\mathscr{K}_\lambda(x))$; i.e. $\mathscr{K}_\lambda$ est invariante par φ.)

Proposition 9.9. — *L'application*

$$\mathscr{K}_H : H^1_{\text{proét}}(\widehat{Z}(0)_C, \mathbf{Z}_p) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \widetilde{\mathbf{A}}^-)^{\varphi=1}$$

ainsi définie est :

- $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[})$*-équivariante si on munit* $\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \widetilde{\mathbf{A}}^-)$ *de l'action donnée par*

$$\big(\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \phi\big)(x) = \widetilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}}(bx)\phi(ax)$$

- $G_{\mathbf{Q}_p}$ *équivariante si on munit* $\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \widetilde{\mathbf{A}}^-)$ *de*

$$(\sigma \cdot \phi)(x) = \sigma(\phi(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}(\sigma)^{-1}x))$$

Démonstration. — Si $\lambda \in \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*, \widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$, alors $\mathscr{K}_\lambda(x)$ est le coefficient du terme de degré 1 (en $\tilde{q}$) de $\big(\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \lambda\big)(1, \tilde{q})$, si on munit $\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ de l'action suivante de $\big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$ qui vient de l'identification avec $\widetilde{\mathscr{O}}(B^-_{\text{Kum}})/(\varphi-1)$ (sur lequel φ agit trivialement)

$$\big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \big(\sum a_i\tilde{q}^i\big) = \sum a_i\tilde{q}^{i/p} = \varphi^{-1}\big(\sum \varphi(a_i)\tilde{q}^i\big) \equiv \sum \varphi(a_i)\tilde{q}^i$$

Le résultat s'en déduit par des calculs sans mystère. □

Remarque 9.10. — L'application $v \mapsto \mathscr{K}_{H,v}(1)$ de $H^1_{\text{proét}}(\widehat{Z}(0)_C, \mathbf{Z}_p)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^-$ est $G_{\mathbf{Q}_p} \times \big(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{Z}} & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$-équivariante si on fait agir $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ par $\big(\begin{smallmatrix} \varepsilon_{\mathbf{A}}(\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \sigma$ sur le membre de gauche et $\big(\begin{smallmatrix} p^k & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$ par $x \mapsto [\varepsilon^b]\varphi^k(x)$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}^-$.

9.3.2. Pour $H^1_{\text{proét}}(\widehat{X}(0)^\times_C, \mathbf{Z}_p)$. — En composant $\mathscr{K}_H$ avec la restriction

$$\mathrm{Res} : H^1_{\text{proet}}(\widehat{X}(0)^\times_C, \mathscr{O}_L) \longrightarrow H^1_{\text{proét}}(\widehat{Z}(0)^\times_C, \mathscr{O}_L)$$

Cela fournit une flèche $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante

$$\mathscr{K}_H : H^1_{\text{proet}}(\widehat{X}(0)^\times_C, \mathscr{O}_L) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-)$$

On la promeut en une flèche $\mathbb{T}[\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}_p}]$-équivariante

$$\mathscr{K}_H^{\mathbb{T}} : H^1_{\text{proet}}(\widehat{X}(0)^\times_C, \mathscr{O}_L) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{\mathbb{T}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-), \quad \langle \mathscr{K}^{\mathbb{T}}_{H,v}(x), \lambda \rangle = \mathscr{K}_{H,\lambda v}(x)$$

puis en une flèche $\mathbb{T}[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}}]$-équivariante

$$\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}} : H^1_{\text{proet}}(\widehat{X}(0)^\times_C, \mathscr{O}_L) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}_p}}^{\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}}} \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \check{\mathbb{T}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^-), \quad \mathscr{K}^{\mathbb{G}}_{H,v}(g) = \mathscr{K}^{\mathbb{T}}_{H,g\cdot v}$$

Une question fondamentale est la détermination du noyau de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$. Dans le chap. 12 nous donnons quelques conséquences de l'injectivité de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ sur des sous-espaces divers et variés. Dans les chap. 10 et 11 nous établissons cette injectivité sur de gros sous-espaces de $H^1_{\text{proet}}(\widehat{X}(0)^\times_C, \mathscr{O}_L)$.

10. Injectivité du modèle de Kirillov : le cas non-eisenstein

Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\mathbb{T}$, on note $\mathbb{T}_\mathfrak{m}$ le localisé de $\mathbb{T}$ en $\mathfrak{m}$. Quitte à agrandir L on peut supposer, ce que nous ferons, que $k_L = \mathbb{T}/\mathfrak{m}$. On dit que $\mathfrak{m}$ est *non-eisenstein* si la réduction $\bar{t}_\mathfrak{m}$ modulo $\mathfrak{m}$ du pseudo-caractère $t_\mathbb{T}$ de la rem. 9.5 est le caractère d'une représentation absolument irréductible $\overline{\rho}_\mathfrak{m} : G_\mathbf{Q} \to \mathrm{GL}_2(k_L)$ de déterminant $\overline{s}'_\mathfrak{m}$ (réduction modulo $\mathfrak{m}$ du caractère $s'_\mathbb{T}$). Il existe alors une représentation $\rho_\mathfrak{m} : G_\mathbf{Q} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{T}_\mathfrak{m})$ dont la trace est le localisé $t_\mathfrak{m}$ de $t_\mathbb{T}$ (i.e. le composé de $t_\mathbb{T}$ et de l'application naturelle $\mathbb{T} \to \mathbb{T}_\mathfrak{m}$) et le déterminant est le localisé $s'_\mathfrak{m}$ de $s'_\mathbb{T}$.

Théorème 10.1. — *Si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est une isométrie sur son image dans chacun des cas suivants :*
- *$p \geq 3$ et la restriction de $\overline{\rho}_\mathfrak{m}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas de la forme $\chi \oplus \chi$.*
- *$p = 2$ et la restriction de $\overline{\rho}_\mathfrak{m}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est ni irréductible ni de la forme $\chi \oplus \chi$.*

Démonstration. — La preuve de ce théorème va demander un peu de préparation ; elle est repoussée au § 10.2. Indiquons juste quels ingrédients entrent dans la preuve. Il s'agit de prouver que $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est une injection modulo $\mathfrak{m}_L$ ou, de manière équivalente, que son noyau est nul. Comme ce noyau est stable par $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, il contient (s'il est non nul) des éléments fixes par le prop-p-iwahori, et donc des classes définies sur une courbe modulaire de niveau petit en p (et donc avec peu de composantes irréductibles dans la fibre spéciale d'un modèle semi-stable bien choisi). Maintenant, par définition de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$, ces classes sont nulles dans le tube des pointes. Ceci conduit à étudier, si Y est une courbe propre, le sous-groupe de $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{F}_p)$ des classes nulles dans le tube de suffisamment de points. On commence par prouver que ces classes sont tuées par l'application dlog (lemme 10.2), puis on prouve que le noyau de dlog est petit (prop. 10.3). Dans le cas qui nous intéresse, cette petitesse implique que ce noyau ne contient pas de sous-espace stable par $G_{\mathbf{Q}}$ (à part dans certains cas spéciaux) et comme $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est, par construction, $G_{\mathbf{Q}}$-équivariante, cela montre que son noyau est nul. $\square$

10.1. Cohomologie des courbes semi-stables

Soit Y une courbe propre et lisse définie sur C et soit Y_S un modèle semi-stable sur $\mathscr{O}_C$ (un tel modèle est équivalent à la donnée d'une triangulation S de Y vue comme espace de Berkovich, d'où la notation). On note $\Omega^1(Y_S)$ l'espace des sections globales du faisceau des formes différentielles logarithmiques ; c'est un réseau de $\Omega^1(Y)$ qui ne dépend pas de S.

10.1.1. L'application dlog. — On dispose d'une application naturelle [22]

$$\mathrm{dlog} : H^1_{\mathrm{et}}(Y, \mathbf{F}_p) \to \Omega^1(Y_S)/p$$

qui peut se définir de la manière suivante [23] : si $x \in H^1_{\mathrm{et}}(Y, \mathbf{F}_p)$, il existe $f \in C(Y)^*$, $\mathrm{Div}(f) \in p\mathrm{Div}(Y)$, tel que x soit la classe de Kummer de f, et on a $\mathrm{dlog}\, x = \frac{df}{f}$.

Lemme 10.2. — *Soit B un ensemble de points lisses de la fibre spéciale Y_S^{sp} de Y_S et, si $Q \in B$, soit $]Q[$ son tube dans Y* (une boule ouverte)*. Si l'intersection de B avec toute composante irréductible de Y_S^{sp} est non vide, on a une injection*

$$\mathrm{Ker}\big[\, H^1_{\mathrm{ét}}(Y, \mathbf{F}_p) \to \oplus_{Q\in B} H^1_{\mathrm{ét}}(]Q[, \mathbf{F}_p)\,\big] \hookrightarrow \mathrm{Ker}\big[\, H^1_{\mathrm{ét}}(Y, \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{dlog}} \Omega^1(Y_S)/p\,\big]$$

Démonstration. — Si $x \in H^1_{\mathrm{ét}}(Y, \mathbf{F}_p)$ est la classe de Kummer de f comme ci-dessus (et donc $\mathrm{dlog}\, x = \frac{df}{f}$), et si x a une image nulle dans $]Q[$, cela signifie que f est une puissance p-ième sur $]Q[$, et donc que la restriction de $\omega := \frac{df}{f}$ à $]Q[$ est nulle (vue comme élément de $\Omega^1(]Q[)^+/p \cong (\mathscr{O}_C/p)[[z_Q]]\, dz_Q$, et pas comme une différentielle sur la fibre spéciale). On en déduit que ω, vue comme section globale du faisceau $\Omega^1_{\log}/p$ sur le schéma formel associé à Y_S, est nulle sur l'ouvert de lissité de la composante irréductible Y_Q de Y_S^{sp} contenant Q. L'hypothèse selon laquelle B rencontre toutes les composantes irréductibles de la fibre spéciale implique que $\omega = 0$ en dehors des points singuliers de la fibre spéciale, et donc que $\omega = 0$ ce que l'on voulait démontrer. $\square$

10.1.2. Lien avec l'application de Hodge-Tate de la jacobienne. — Si G est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathscr{O}_C$, on dispose d'une application de Hodge-Tate α_G : $G(C) \to \omega_{G^\vee}$ où $G^\vee$ est le dual de Cartier de G. Cette application est définie de la manière suivante : par définition, $u \in G(C)$ fournit un morphisme $u : G^\vee \to \mathbf{G}_m[p^\infty]$,

22. Philosophiquement, c'est $\mathbf{F}_p(1)$ plutôt que $\mathbf{F}_p$ mais nous sommes sur un corps algébriquement clos.

23. Une autre définition possible passe par la comparaison avec la cohomologie syntomique [**18**].

et on définit $\alpha_G(u) = u^* \frac{dT}{1+T}$ (où $\frac{dT}{1+T}$ est la base standard de l'espace des formes différentielles invariantes sur $\widehat{\mathbf{G}}_m$).

Le choix de $P_0 \in Y$ fournit un plongement $\iota : Y_S \to J$ (où J désigne le modèle de Néron de la jacobienne) et un diagramme commutatif (indépendant du choix de P_0)

$$\begin{tikzcd} H^1_{\text{ét}}(J, \mathbf{F}_p) \arrow[r, "\alpha_{J[p]}"] \arrow[d, "\iota^*"', "\wr"] & \Omega^1(J)/p \arrow[d, "\iota^*"', "\wr"] \\ H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{F}_p) \arrow[r, "\text{dlog}"] & \Omega^1(Y_S)/p \end{tikzcd}$$

Pour vérifier la commutativité du diagramme, on part de $u \in J[p]$. Si Θ est le diviseur thêta, il existe $f_u \in C(J)^*$, unique à multiplication près par un constante, de diviseur $p((\Theta \ominus u) - \Theta)$. Si $v \in J[p]$, alors $f_u(v)/f_u(0) = \langle u, v\rangle_{\text{Weil}}$. Il s'ensuit que $\alpha_{J[p]}(u) = \frac{df_u}{f_u}$. Par ailleurs, $\iota^* f_u$ est une fonction sur Y dont la classe de Kummer représente u (modulo l'identification $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{F}_p) \cong J[p]$), et donc $\text{dlog}(u) = \frac{d\iota^* f_u}{\iota^* f_u} = \iota^*(\alpha_{J[p]}(u))$.

10.1.3. Le noyau de l'application dlog. — Si G est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathscr{O}_C$, on définit sa *pente* $\mu(G)$ par $\mu(G) := \frac{\deg(G)}{\text{ht}(G)}$, où $|G| = p^{\text{ht}(G)}$ et $\deg(G) = \sum v_p(x_i)$ si $\omega_G \cong \oplus \mathscr{O}_C/x_i$.

Proposition 10.3. — *La pente de* $\text{Ker}\big(H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\text{dlog}} \Omega^1(Y_S)/p\big)$ *vu comme sous-schéma en groupes de* $J[p]$, *est* $\geq 1 - \frac{1}{p}$.

Démonstration. — Soit $e_1, \ldots, e_r$ une base sur $\mathbf{F}_p$ du noyau G de dlog et soit G_i le sous-schéma en groupes de $J[p]$ engendré par e_i. Alors $\mu(G) \geq \mu(G_1 \oplus \cdots \oplus G_r)$ d'après le (4) de [**31**, cor. 5], et $\mu(G_1 \oplus \cdots \oplus G_r) \geq \inf_i \mu(G_i)$ par définition de μ et additivité de ht et deg dans une somme directe. Il suffit donc de prouver que $\mu(G_i) \geq 1 - \frac{1}{p}$. Or G_i est, d'après Oort-Tate, de la forme $\text{Spec}(\mathscr{O}_K[T]/(T^p - aT))$, $v_p(a) \in [0, 1]$, et il résulte de [**30**, n° 1.1.1] que $\text{dlog}(a^{1/(p-1)}) = a^{1/(p-1)}\, dT$ dans $\omega_{G_i} \cong (\mathscr{O}_C/pa^{-1})\, dT$. Il s'ensuit que $\text{dlog}(a^{1/(p-1)}) = 0$ si et seulement si $\frac{v_p(a)}{p-1} \geq 1 - v_p(a)$, c'est à dire si $v_p(a) \geq 1 - \frac{1}{p}$. Comme $\text{ht}(G) = 1$, on a $\mu(G) = \deg(G) = v_p(\text{Ann}(dT)) = v_p(a)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Question 10.4. — Peut-on remplacer $\geq 1 - \frac{1}{p}$ par $> 1 - \frac{1}{p}$ dans l'énoncé de la prop. 10.3 ? Cela permettrait de supprimer l'hypothèse “non irréductible” pour $p = 2$ dans le th. 10.1.

10.2. Preuve du th. 10.1

Il s'agit de prouver que $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est une injection modulo p. On est donc ramené à considérer l'application induite

$$\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}} : H^1_{\text{proét}}(\widehat{X}(0)_C^\times, k_L)_{\mathfrak{m}} \to \text{Ind}_{\mathscr{O}_L[\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}_p}]}^{\mathbb{T}[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}}]} \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, k_L \otimes_{\mathbf{F}_p} \widetilde{\mathbf{E}}^-)$$

Le noyau de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est un $\mathbb{T}[\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})\times G_{\mathbf{Q}}]$-module. Soit M une composante irréductible du $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-socle de ce noyau. Alors M est tuée par $\mathfrak{m}$ car $H^1_{\text{proét}}(\widehat{X}(0)^{\times}_C, k_L)_{\mathfrak{m}}$ est de $\mathfrak{m}^\infty$-torsion. En tant que représentation de $G_{\mathbf{Q}}$, le module M est $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$-isotypique d'après le lemme 10.6 ci-dessous.

Comme M est la limite inductive de ses intersections avec les $H^1_{\text{ét}}(X(N)^{\times}_C, k_L)$, il existe N premier à p et $k\in\mathbf{N}$ tels que $M' := M\cap H^1_{\text{ét}}(X(Np^k)^{\times}_C, k_L)$ soit non nul.

Maintenant, $\left(\begin{smallmatrix}1+p\mathbf{Z}_p & \mathbf{Z}_p\\ p\mathbf{Z}_p & 1+p\mathbf{Z}_p\end{smallmatrix}\right)$ est un pro-p-groupe qui agit sur M', et donc M' contient un élément non nul fixe par ce sous-groupe. Il s'ensuit que $M'' := M[\mathfrak{m}]\cap H^1_{\text{ét}}(X(N,p)^{\times}_C, k_L)\neq 0$. De plus, M'' est stable par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)_p$.

Par ailleurs, $X(N,p)$ a un modèle semi-stable sur $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_p]$, dont la fibre spéciale a deux composantes connexes et l'une de ces composantes connexes contient la pointe ∞, l'autre la pointe $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)_p\cdot\infty$. Comme M'' est contenu dans le noyau de $\mathscr{K}_H$, cela implique que les éléments de M'' sont triviaux sur le tube de la pointe ∞, et comme M'' est stable par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)_p$, ils sont aussi triviaux sur le tube de la pointe $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)_p\cdot\infty$.

Soit J la jacobienne de $X(N,p)$ et soit J^{div} le groupe p-divisible sur $\mathbf{Q}$ associé. L'algèbre de Hecke $\mathbb{T}$ agit sur $\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} J^{\text{div}}$. On note $J^{\text{div}}_{\mathfrak{m}}$ le localisé en $\mathfrak{m}$ de $\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} J^{\text{div}}$ (c'est un facteur direct de $\mathscr{O}_L\otimes_{\mathbf{Z}_p} J^{\text{div}}$). On note $J^{\text{mult}}_{\mathfrak{m}}\subset J^{\text{cnx}}_{\mathfrak{m}}$ les plus grands sous-groupes p-divisibles de $J^{\text{div}}_{\mathfrak{m}}$ sur $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_p]$ (le prolongement à $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_p]$ se fait en considérant le modèle de Néron de J sur $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_p]$), de type multiplicatif et connexe. Alors [24] $H^1_{\text{ét}}(X(N,p)^{\times}_C, k_L)$ s'identifie à $J^{\text{div}}[p]$ et cette identification induit des inclusions $M''\hookrightarrow J^{\text{div}}_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]\hookrightarrow J^{\text{div}}_{\mathfrak{m}}[p]$. Comme les éléments de M'' sont triviaux dans le voisinage des pointes et que chaque composante de la fibre spéciale de $X(N,p)$ contient une pointe, il résulte du lemme 10.2 et de la prop. 10.3 que $M''\subset J^{\text{cnx}}_{\mathfrak{m}}[p]^{1-\frac{1}{p}}$.

• Si $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est ordinaire, on a $J^{\text{cnx}}_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}] = J^{\text{mult}}_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]$, et donc $M''\subset J^{\text{mult}}_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]$. Par ailleurs, il résulte de [**37**, prop. 12.8 et 12.9] que $G_{\mathbf{Q}_p}$ agit par un caractère sur $J^{\text{mult}}_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]$. On en déduit que $J^{\text{mult}}_{\mathfrak{m}}[\mathfrak{m}]$ ne contient pas de copie de la restriction de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ (et donc que $M''=0$) si cette restriction est une extension non triviale de deux caractères (non nécéssairement distincts) ou la somme directe de deux caractères distincts. Par contre, si cette restriction est de la forme $\chi\oplus\chi$, on ne peut pas conclure de cette manière que $M''=0$.

• Si la restriction de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est irréductible, le schéma en groupes M'' sur $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_p]$ est complètement déterminé par sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_p)}$ puisqu'il ne contient ni sous-groupe multiplicatif ni quotient étale, étant une somme de copies de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$. Mais la restriction de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ à une extension non ramifiée convenable de $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_p)$ est auto-duale. On en déduit que le schéma en groupe associé est de pente $\frac{1}{2}$ et donc que M'' est de pente $\frac{1}{2}$. Comme on sait par ailleurs que M'' est de pente $\geq 1-\frac{1}{p}$, cela prouve que $M''=0$ si $p\geq 3$.

24. Ou plutôt $H^1_{\text{ét}}(X(N,p)^{\times}_C, k_L(1))$.

Ceci permet de conclure.

Remarque 10.5. — Le cas où la restriction de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est de la forme $\chi \oplus \chi$ est le plus délicat à bien des égards : en particulier, il résulte de [**68**, cor. 4.4] et de [**37**, prop. 12.8 et 12.9] que $J_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{mult}}[\mathfrak{m}]$ contient des copies de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$.

Lemme 10.6. — *Si* $\mathfrak{m}$ *est non-eisenstein, l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbf{Q}}}(\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}, H^1[\mathfrak{m}]) \otimes \overline{\rho}_{\mathfrak{m}} \to H^1[\mathfrak{m}]$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, cette application est injective. Par ailleurs, si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}}$, alors $P_{\mathfrak{m}}(\sigma) := \sigma^2 - \overline{t}_{\mathfrak{m}}(\sigma) + \overline{s}'_{\mathfrak{m}}$ tue $H^1[\mathfrak{m}]$ et donc aussi tous ses sous-quotients. L'irréductibilité de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ impliquent donc que tous les sous-quotients irréductibles de $\widehat{H}^1[\mathfrak{m}]$ sont isomorphes à $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, et il suffit de prouver que $\widehat{H}^1[\mathfrak{m}]$ n'a aucun sous-quotient qui est une extension non triviale de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ par $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$.

Une telle extension V peut être aussi vue comme une représentation de dimension 2 sur $k_L[\varepsilon]$ (avec $\varepsilon^2 = 0$ et $V/\varepsilon V = \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$), et il résulte de ce qui précède que le polynôme minimal de tout élément de $G_{\mathbf{Q}}$ est à coefficients dans k_L ; on veut en déduire que $V \cong k_L[\varepsilon] \otimes_{k_L} \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$. Comme $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible, son image G n'est pas incluse dans un borel de $\mathrm{GL}_2(k_L)$ et son image dans $\mathrm{PGL}_2(k_L)$ n'est pas contenue dans un p-sylow (car les p-sylows de $\mathrm{PGL}_2(k_L)$ sont les conjugués du sous-groupe des unipotents supérieurs et leurs images inverses sont contenues dans des borels) ; on en déduit l'existence de $g \in G$, semi-simple à valeurs propres $\alpha \neq \beta$.

Soit v_α, v_β une base de $V/\varepsilon V$ constituée de vecteurs propres pour g. Il résulte de la discussion ci-dessus que le polynôme minimal de g agissant sur V est $(X-\alpha)(X-\beta)$ et on peut relever v_α, v_β dans V, de manière unique, en des vecteurs propres pour g. Montrons que $k_L v_\alpha \oplus k_L v_\beta$ est stable par $G_{\mathbf{Q}}$, ce qui permettra de conclure puisque $V = k_L[\varepsilon] \otimes_{k_L} (k_L v_\alpha \oplus k_L v_\beta)$.

Il suffit de prouver que, si $\lambda \in k_L[G_{\mathbf{Q}}]$ vérifie $\lambda \cdot v_\alpha, \lambda \cdot v_\beta \in \varepsilon V$, alors $\lambda \cdot v_\alpha = \lambda \cdot v_\beta = 0$. Si $\lambda \cdot v_\alpha = \varepsilon(a(\lambda)v_\alpha + c(\lambda)v_\beta)$ et $\lambda \cdot v_\beta = \varepsilon(b(\lambda)v_\alpha + d(\lambda)v_\beta)$, alors $a(\lambda) + d(\lambda) = 0$ par hypothèse sur la trace. Mais $g\lambda$ vérifie les mêmes hypothèses et on a $a(g\lambda) = \alpha a(\lambda)$ et $d(g\lambda) = \beta d(\lambda)$. Il s'ensuit que $a(\lambda) = d(\lambda) = 0$. On peut aussi appliquer ceci à $h\lambda$, où $h \in G$ est tel que $h(v_\alpha)$ et $v(v_\beta)$ ne sont pas colinéaires à v_α et v_β (un tel h existe par irréductibilité de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$) ; on en déduit que $b(\lambda) = c(\lambda) = 0$, ce qui permet de conclure. □

11. Injectivité du modèle de Kirillov : le cas général

Il résulte du th. 10.1 que $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est injective si on localise en un idéal non-eisenstein (à quelques exceptions près). Dans ce chapitre, on donne une seconde preuve de cette injectivité qui permet de contrôler le noyau éventuel dans le cas eisenstein et les exceptions du cas non-eisenstein (le prix à payer est que l'on perd le résultat d'intégralité du th. 10.1). Cette preuve passe par une analyse des vecteurs de la cohomologie complétée fixes par $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ (les méthodes utilisées sont inspirées de Pan [**51**] – qui a fait une analyse détaillée des vecteurs localement analytiques fixes par l'algèbre de Lie de $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ – et de Sean Howe [**40**]).

11.1. La tour des courbes d'Igusa

On pose

$$\widehat{X}(]p[,p) := \widehat{X}(0)/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$$

Si on décompose e_i^* sous la forme $((e_i^*)_p, (e_i^*)^{]p[})$ en regardant les composantes en p et en-dehors de p, quotienter $\widehat{X}(0)$ par $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ revient à remplacer l'information contenue dans $((e_1^*)_p, (e_2^*)_p)$ par $((e_1^*)_p, (e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p)$; il s'ensuit que

$$\widehat{X}(]p[,p) = \widehat{X}(]p[,p)^0 \times \mathbf{Z}_p(1)^\times$$

où $\widehat{X}(]p[,p)^0$ classifie les triplets $(E, e_1^*, (e_2^*)^{]p[})$, où e_1^* est un élément primitif de $T_{\widehat{\mathbf{Z}}}E$ et $(e_1^*)^{]p[}, (e_2^*)^{]p[}$ forment une base $T^{]p[}E$, et où $\mathbf{Z}_p(1)^\times$ est l'ensemble des bases de $\mathbf{Z}_p(1)$ sur $\mathbf{Z}_p$ (le $\mathbf{Z}_p(1)^\times$ encode l'accouplement de Weil $(e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p$ des composantes en p ; la torsion galoisienne se traduit par le fait que $\mathscr{O}(\mathbf{Z}_p(1)^\times)$ est le complété p-adique de $\mathbf{Z}[\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}]$ (et pas $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p(1)^\times, \mathbf{Z}_p)$)).

Soit $\mathrm{Ig}(0)$ la composante connexe du lieu ordinaire de $X(0)$ contenant la pointe ∞ : $\mathrm{Ig}(0)$ paramêtre les triplets (E, e_1^*, e_2^*) où E est une courbe elliptique ordinaire, $(e_1^*)_p$ est un générateur du module de Tate $T_p\widehat{E}$ du groupe formel de E (isomorphe à $\widehat{\mathbf{G}}_m$ sur $\mathscr{O}_C$), et e_1^*, e_2^* est une base du module de Tate adélique sur $\widehat{\mathbf{Z}}$. En particulier, $\mathrm{Ig}(0)$ contient le voisinage habituel $Z(0)$ de la pointe ∞.

Soit $\mathrm{Ig}(]p[)$ la composante connexe correspondante du lieu ordinaire de $X(]p[,p)$. On a

$$\mathrm{Ig}(]p[) := \mathrm{Ig}(0)/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \quad \mathrm{Ig}(]p[) = \mathrm{Ig}(]p[)^0 \times \mathbf{Z}_p(1)^\times$$

où $\mathrm{Ig}(]p[)^0 \subset X(]p[,p)^0$ est le lieu des $(E, e_1^*, (e_2^*)^{]p[})$ où E est une courbe elliptique ordinaire, $(e_1^*)_p$ est un générateur de $T_p\widehat{E}$.

Remarque 11.1. — Si κ est un caractère de $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$, alors $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[))_\kappa$ est l'espace des formes modulaires p-adiques de poids κ (et niveau arbitraire en dehors de p). L'espace $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[))$ est l'espace de toutes les formes modulaires p-adiques.

L'application de Hodge-Tate $\pi_{\mathrm{HT}} : X(0)_C \to \mathbf{P}^1$, commute aux actions de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ (où $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ agit à travers $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{P}^1$). Cette application envoie le lieu ordinaire sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et le lieu supersingulier sur le demi-plan de Drinfeld $\mathbf{P}^1\backslash\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, et on a

$$\mathrm{Ig}(0)_C := \pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\{\infty\})$$

11.2. Décomposition de Hodge-Tate pour les $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-invariants

Théorème 11.2. — (Comparer avec [**29, 1**] et [**59**, th. 1.0.4])

On a une suite exacte naturelle, $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty,p[}) \times \mathbb{B}(\mathbf{Z}_p) \times G_{\mathbf{Q}_p}$*-équivariante*

$$0 \to H^1(X(]p[,p)_C^{\times}, \mathscr{O}) \to H^1_{\text{proét},c}(X(0)_C^{\times}, C)^{\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)} \to \mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^{\times})(-1) \to 0$$

Démonstration. — D'après le théorème de comparaison primitif de Scholze [**62**, th. IV.2.1], on a un isomorphisme naturel (avec $\widehat{\mathscr{O}}^b = \widehat{\mathscr{O}}^+[\frac{1}{p}]$)

$$H^1_{\text{ét},c}(X(0)_C^{\times}, C) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{proét},c}(X(0)_C^{\times}, \widehat{\mathscr{O}}^b)$$

Par ailleurs, comme $H^0_{\text{proét},c}(X(0)_C^{\times}, \widehat{\mathscr{O}}) = 0$, la restriction fournit un isomorphisme naturel

$$H^1_{\text{proét},c}(X(0)_C^{\times}/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p), \widehat{\mathscr{O}}^b) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{proét},c}(X(0)_C^{\times}, \widehat{\mathscr{O}}^b)^{\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)}$$

Soit

$$X'(0)_C := X(0)_C \smallsetminus \mathrm{Ig}(0)_C$$

Alors $X(0)_C$ s'obtient en recollant $\mathrm{Ig}(0)_C$ et $X'(0)_C$ le long de $\partial X'(0)_C$ qui est une limite profinie de cercles fantômes perfectoïdes (ou, si l'on préfère, de points de type 5). Les espaces $\mathrm{Ig}(0)_C$, $\partial X'(0)_C$ et $X'(0)_C$ sont affines perfectoïdes ainsi [**7**, th. 4.5.2] que $X'(0)_C/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ et $\partial X'(0)_C/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ (mais pas $\mathrm{Ig}(0)_C/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ ni son bord $\partial\mathrm{Ig}(0)_C/\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ qui sont simplement affines).

Notons simplement $X, X', \mathrm{Ig}, \partial$ les espaces $X(0)_C^{\times}, X'(0)_C^{\times}$, $\mathrm{Ig}(0)_C^{\times}$, $\partial X'(0)_C$ et U le groupe $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$ (et γ son générateur topologique $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$). On a une surjection $\partial/U \to \partial\mathrm{Ig}/U$ et X/U s'obtient en recollant X'/U et Ig/U le long de ∂/U : i.e. si V est un ouvert de X/U, alors

$$\mathscr{O}(V) = \{\phi_1 \in \mathscr{O}(V \cap (X'/U)), \phi_2 \in \mathscr{O}(V \cap (\mathrm{Ig}/U)),\ \phi_1 = \phi_2 \text{ dans } \mathscr{O}(V \cap (\partial/U))\}$$

Comme Ig est quasi-compacte, on a $\widehat{\mathscr{O}}^b(\mathrm{Ig}) = \widehat{\mathscr{O}}(\mathrm{Ig})$ et $\widehat{\mathscr{O}}^b(\partial) = \widehat{\mathscr{O}}(\partial)$.

On a $\mathrm{R}\Gamma_{\text{proét}}(\mathrm{Ig}/U, \widehat{\mathscr{O}}^b) \simeq (\mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \xrightarrow{\gamma-1} \mathscr{O}(\mathrm{Ig}))$ car Ig est affine perfectoïde et donc $\mathrm{R}\Gamma_{\text{proét}}(\mathrm{Ig}, \widehat{\mathscr{O}}^b) \simeq (\mathscr{O}(\mathrm{Ig}))$. Pour les mêmes raisons, on a $\mathrm{R}\Gamma_{\text{proét}}(X'/U, \widehat{\mathscr{O}}^b) \simeq (\mathscr{O}^b(X')^U)$ et $\mathrm{R}\Gamma_{\text{proét}}(\partial/U, \widehat{\mathscr{O}}^b) \simeq (\mathscr{O}(\partial) \xrightarrow{\gamma-1} \mathscr{O}(\partial))$ (on a aussi $\mathrm{R}\Gamma_{\text{proét}}(\partial/U, \widehat{\mathscr{O}}^b) \simeq (\mathscr{O}(\partial)^U)$, i.e. $\mathscr{O}(\partial) \xrightarrow{\gamma-1} \mathscr{O}(\partial)$ est surjective, mais nous préférerons le premier quasi-isomorphisme). On en déduit que $\mathrm{R}\Gamma_{\text{proét}}(X/U, \widehat{\mathscr{O}}^b)$ est le complexe simple associé au complexe double

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^b(X')^U \oplus \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) & \xrightarrow{(0,\gamma-1)} & \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}(\partial) & \xrightarrow{\gamma-1} & \mathscr{O}(\partial) \end{array}$$

Notons Z^1 le noyau de $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \oplus \mathscr{O}(\partial) \to \mathscr{O}(\partial)$. Comme $\mathscr{O}(\partial) \xrightarrow{\gamma-1} \mathscr{O}(\partial)$ est surjective, on a une suite exacte $0 \to \mathscr{O}(\partial)^U \to Z^1 \to \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \to 0$. Cette suite exacte s'inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}^b(X')^U \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}^b(X')^U \oplus \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma-1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}(\partial)^U \arrow[r] & Z^1 \arrow[r] & \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme le noyau de $\mathscr{O}^b(X')^U \oplus \mathscr{O}(\mathrm{Ig}) \to Z^1$ est nul (car c'est $H^0_{\mathrm{pro\acute{e}t},c}(X/U, \widehat{\mathscr{O}})$), le lemme du serpent fournit une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}(\mathrm{Ig})^U \to \mathscr{O}(\partial)^U/\mathscr{O}(X')^U \to H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X/U, \widehat{\mathscr{O}}) \to H^1(U, \mathscr{O}(\mathrm{Ig})) \to 0$$

Comme X'/U et Ig/U sont affines, on a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}^b(X')^U \oplus \mathscr{O}(\mathrm{Ig})^U \to \mathscr{O}(\partial)^U \to H^1(X/U, \mathscr{O}) \to 0$$

Le conoyau de $\mathscr{O}(\mathrm{Ig})^U \to \mathscr{O}(\partial)^U/\mathscr{O}^b(X')^U$ s'identifie donc à $H^1(X(]p[,p)^\times_C, \mathscr{O})$. On conclut en utilisant l'isomorphisme

$$\cup\,\nu : \mathscr{O}(\mathrm{Ig}/U) \cong H^1(U, \mathscr{O}(\mathrm{Ig}))$$

qui permet d'identifier $H^1(U, \mathscr{O}(\mathrm{Ig}))$ à $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)^\times_C)$; le twist (-1) provenant de la rem. 8.17. □

Remarque 11.3. — La flèche naturelle $H^1(U, \mathscr{O}(\mathrm{Ig})) \to H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{Ig}/U, \widehat{\mathscr{O}})$ est un isomorphisme et la composée avec $H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X/U, \widehat{\mathscr{O}}) \to H^1(U, \mathscr{O}(\mathrm{Ig}))$ est la restriction (elle est induite par la flèche naturelle $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(X/U, \widehat{\mathscr{O}}) \to \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\mathrm{Ig}/U, \widehat{\mathscr{O}})$).

11.3. Le modèle de Kirillov des $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-invariants

La restriction de $\mathscr{K}_H : H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\widehat{Z}(0)^\times_C, \mathbf{Z}_p) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, \widetilde{\mathbf{A}}^-)$ aux $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$-invariants est tuée par $[\varepsilon]^{x_p}-1$, et donc à valeurs dans $([\varepsilon]^{p^n}-1)^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}^+/\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sur $p^n\mathbf{Z}_p \times \mathbf{A}^{]p,\infty[,*}$. On peut donc la composer avec la flèche naturelle de $([\varepsilon]^{p^n}-1)^{-1}\widetilde{\mathbf{A}}^+/\widetilde{\mathbf{A}}^+$ dans $t^{-1}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} = Ct^{-1}$ et l'étendre, par C-linéarité et continuité en une flèche

$$C\otimes\mathscr{K}_H : H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\widehat{Z}(0)^\times_C, C)^{\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)} \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, t^{-1}C)$$

Rappelons par ailleurs que l'on dispose aussi d'un modèle de Kirillov $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant $\mathscr{K} : \mathscr{O}(Z(0)^\times_C) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, C)$.

Proposition 11.4. — *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathrm{pro\acute{e}t}}(\widehat{X}(0)^\times_C, C)^{\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)} \arrow[r, "C\otimes\mathscr{K}_H"] \arrow[d] & \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, t^{-1}C) \arrow[dd, "\times|\ |_{\mathbf{A}}"] \\
\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)^\times_C)(-1) \arrow[d] & \\
\mathscr{O}(Z(]p[)^\times_C)(-1) \arrow[r, "\mathscr{K}(-1)"] & \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, C(-1))
\end{tikzcd}$$

(La première flèche verticale à gauche est celle du th. 11.2, la seconde est la restriction, $\mathscr{K}(-1)$ est obtenu en tordant $\mathscr{K}$ par $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{-1}$ et on a identifié $C(-1)$ à $t^{-1}C$ dans la flèche verticale à droite.)

Démonstration. — Notons simplement X, Ig, Z et U les espaces $X(0)_C^\times$, $\mathrm{Ig}(0)_C^\times$, $Z(0)_C^\times$, et le groupe $\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)$, et $H^1(-,\mathbf{Z}_p)$, $H^1(-,\widehat{\mathscr{O}})$ les groupes $H^1_{\text{proét}}(-,\mathbf{Z}_p)$, $H^1_{\text{proét}}(-,\widehat{\mathscr{O}})$.

On a un isomorphisme $H^1(X,\mathbf{Z}_p)^U \cong H^1(X/U,\mathbf{Z}_p)$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^1(X/U,\mathbf{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathrm{Ig}/U,\mathbf{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Z/U,\mathbf{Z}_p) \arrow[d] & \\
H^1(X/U,\widehat{\mathscr{O}}) \arrow[r] & H^1(\mathrm{Ig}/U,\widehat{\mathscr{O}}^b) \arrow[r] & H^1(Z/U,\widehat{\mathscr{O}}^b) & \\
& H^1(U,\mathscr{O}(\mathrm{Ig})) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & H^1(U,\mathscr{O}^b(Z)) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"', "\exp_B^*"] \arrow[dr, "\log_B^0"] & \\
& \mathscr{O}(\mathrm{Ig})^U(-1) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"', "\cup\nu"] & \mathscr{O}^b(Z)^U(-1) \arrow[r, "\partial^{-1}"] \arrow[d, "\mathscr{K}(-1)"'] & t^{-1}\mathscr{O}(Z)^U \arrow[d, "t^{-1}\mathscr{K}"] \\
& & \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, C(-1)) \arrow[r, "\times|\ |_{\mathbf{A}}^{-1}"] & \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, t^{-1}C)
\end{tikzcd}$$

On passe de la première à la seconde ligne par l'injection naturelle $\mathbf{Z}_p \hookrightarrow \widehat{\mathscr{O}}$ et de la première à la seconde colonne, puis à la troisième, par restriction. Le carré du milieu commute d'après la rem. 11.3 ; le triangle de droite (troisième et quatrième lignes) commute grâce à la rem. 8.19, et le carré du bas grâce à la formule $\mathscr{K}_{\partial\lambda} = |\ |_{\mathbf{A}}^{-1}\mathscr{K}_\lambda$ du (iv) de la rem. 9.2.

Le modèle de Kirillov pour $H^1(X,\mathbf{Z}_p)^U$ est obtenu en passant par les flèches extérieures du haut et de droite. A part la première ligne, tous les modules intervenant dans le diagramme sont des C-modules et les flèches sont C-linéaires ; on peut donc rendre tout le diagramme C-linéaire en remplaçant les groupes $H^1(-,\mathbf{Z}_p)$ de la première ligne par les $H^1(-,C)$ correspondant, et la flèche $C\otimes\mathscr{K}_H : H^1(X,C)^U \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, t^{-1}C)$ de la proposition est encore obtenue en suivant l'extérieur du diagramme. On conclut en utilisant les identifications $\mathscr{O}(\mathrm{Ig})^U = \mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times)$ et $\mathscr{O}(Z)^U = \mathscr{O}(Z(]p[)_C^\times)$. □

Corollaire 11.5. — *Le noyau de $\mathscr{K}_H : H^1(X(0)_C^\times,\mathbf{Z}_p)^{\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)} \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, t^{-1}C)$ est l'intersection avec $H^1(X(]p[,p)_C^\times,\mathscr{O})$. Le résultat reste vrai pour le noyau de $C\otimes\mathscr{K}_H$.*

Démonstration. — Les flèches $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times) \to \mathscr{O}(Z(]p[)_C^\times)$ et $\mathscr{K} : \mathscr{O}(Z(]p[)_C^\times) \to \mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*}, C)$ sont injectives (par injectivité du q-développement d'une forme modulaire p-adique) ainsi que la multiplication par $|\ |_{\mathbf{A}}$. On en déduit que le noyau de $\mathscr{K}_H$ est le même que celui de la flèche vers $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times)(-1)$. Le th. 11.2 permet de conclure. □

11.4. L'opérateur de Sen sur les espaces propres pour $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$

Soit $\kappa=\kappa_1\otimes\kappa_2$ un caractère de $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$. Si M est un $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$-module, on note M_κ le sous-espace sur lequel $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$ agit par κ. On déduit du th. 11.2 une suite exacte $G_{\mathbf{Q}_p}\times\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$-équivariante

$$0\to H^1(X(]p[,p)_C^\times,\mathscr{O})_\kappa\to(C\widehat{\otimes}H^1_{\mathrm{proét},c}(X(0)_C,\mathbf{Z}_p))_\kappa\to\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times)_\kappa(-1)$$

($\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times)_\kappa$ est l'espace des formes modulaires p-adiques de poids κ.)

Proposition 11.6. — *L'opérateur de Sen est la multiplication par :*
- $-w(\kappa_2)$ *sur* $H^1(X(]p[,p)_C^\times,\mathscr{O})_\kappa$,
- $-1-w(\kappa_1)$ *sur* $\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times)_\kappa(-1)$.

Démonstration. — Notons que $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)_p\in\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\mathbf{Z}_p^*\end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur $X(]p[,p)^0$ et agit par $u\mapsto ud$ sur $\mathbf{Z}_p(1)^\times$. On voit κ_i, si $i=1,2$, aussi comme un caractère de $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ et de $G_{\mathbf{Q}_p}$ via les projections $\widehat{\mathbf{Z}}^*\to\mathbf{Z}_p^*$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_p:G_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Z}_p^*$.

On a $H^1(X(]p[,p)_C^\times,\mathscr{O})=H^1(X(]p[,p)_C^{0,\times},\mathscr{O})\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*,C)$. Le th. 11.2 fournit donc une flèche équivariante pour les actions de $G_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$:

$$H^1(X(]p[,p)_C^{0,\times},\mathscr{O})\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*,C)\to C\widehat{\otimes}H^1_{\mathrm{proét},c}(X(0)_C^\times,\mathbf{Z}_p)^{\mathbb{U}(\mathbf{Z}_p)}$$

(Comme $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)_p\in\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\mathbf{Z}_p^*\end{smallmatrix}\right)$ agit trivialement sur $X(]p[,p)^0$ et agit par $u\mapsto ud$ sur $\mathbf{Z}_p(1)^\times$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)_p$ est $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)_p\cdot\phi\big)(u)=\phi(ud)$ sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*,C)$ et est triviale sur $H^1(X(]p[,p)_C^{0,\times},\mathscr{O})$.)

On en déduit que, si $v\in(H^1(X(]p[,p)^{0,\times},\mathscr{O})\otimes\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*,C))_\kappa$, alors v est de la forme $v_0\otimes\kappa_2$ avec $v_0\in H^1(X(]p[,p)^{0,\times},\mathscr{O})\otimes C$, et κ_2 vu comme un caractère de $\widehat{\mathbf{Z}}^*$. Alors $\sigma(v)=\kappa_2^{-1}(\sigma)\,\sigma(v_0)\otimes\kappa_2$ (cf. rem. 9.7 pour l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*,C)$). Comme l'opérateur de Sen est trivial sur $H^1(X(]p[,p)^{0,\times},\mathscr{O})\otimes C$, c'est la multiplication par $-w(\kappa_2)$ sur $(H^1(X(]p[,p)^{0,\times},\mathscr{O})\otimes\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*,C))_\kappa$.

Ceci prouve le premier point ; pour prouver le second, on utilise le modèle de Kirillov : le cor. 11.5 fournit une injection $\mathbb{P}(\mathbf{Z}_p)\times G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante

$$H^1_{\mathrm{proét}}(X(0)_C^\times,C)_\kappa/H^1(X(]p[,p)_C^\times,\mathscr{O})_\kappa\to\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},t^{-1}C)_\kappa$$

On peut décomposer $\mathbf{A}^{]\infty[,*}$ sous la forme $W\times\mathbf{Z}_p^*$ (avec $W=\mathbf{A}^{]\infty,p[,*}\times p^{\mathbf{Z}}$) et alors $\mathscr{C}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},t^{-1}C)_\kappa=\mathscr{C}(W,t^{-1}C)\otimes\kappa_1$ car $\big(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_p\cdot\phi\big)(w,u)=\phi(w,a\,u)$. L'action de $\sigma\in G_{\mathbf{Q}_p}$ est $(\sigma\cdot\phi)(w,u)=\sigma(\phi(w,\boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma)^{-1}u))$. Si $\phi=t^{-1}\phi_0\otimes\kappa_1$, avec $\phi_0\in\mathscr{C}(W,C)$, on obtient l'action standard sur ϕ_0 tordue par $\kappa_1^{-1}(\sigma)\boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma)^{-1}$, et comme l'opérateur de Sen est trivial sur $\mathscr{C}(W,C)$, c'est la multiplication par $-w(\kappa_1\boldsymbol{\varepsilon}_p)=-w(\kappa_1)-1$ sur $\mathscr{C}(W,t^{-1}C)\otimes\kappa_1$. □

Remarque 11.7. — (Comparer avec [**51**, th. 1.0.1]) La suite

$$0\to H^1(X(]p[,p)_C^\times,\mathscr{O})_\kappa\to(C\otimes H^1_{\mathrm{proét},c}(X(0)_C^\times,\mathbf{Z}_p))_\kappa\to\mathscr{O}(\mathrm{Ig}(]p[)_C^\times)_\kappa(-1)\to0$$

est en fait exacte : le terme suivant serait $H^1(\mathbf{Z}_p^* \times \mathbf{Z}_p^*, H^1(X(]p[,p)_C^\times \times \mathbf{Z}_p^*, \mathscr{O}))$. Ce groupe est isomorphe à $H^1(\mathbf{Z}_p^*, H^1(X(]p[,p)_C^{\times,0}, \mathscr{O}))$ car la cohomologie d'une induite est concentrée en degré 0. Mais $H^1(X(]p[,p)_C^{\times,0}, \mathscr{O})$ est un quotient de $\mathscr{O}(\partial X_C'^{,0})$ et donc $H^1(\mathbf{Z}_p^*, H^1(X(]p[,p)_C^{\times,0}, \mathscr{O}))$ est un quotient de $H^1(\mathbf{Z}_p^*, \mathscr{O}(\partial X_C'^{,0}))$ car $\mathbf{Z}_p^*$ est de dimension cohomologique 1. Comme $\partial X_C'^{,0}/\mathbf{Z}_p^*$ est perfectoïde affine, cela implique que $H^1(\mathbf{Z}_p^*, \mathscr{O}(\partial X_C'^{,0})) = 0$; d'où le résultat.

11.5. Injectivité sur l'ouvert d'irréductibilité. — Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal fermé de $\mathbb{T}[\frac{1}{p}]$, et soit $\rho_\mathfrak{p}$ le représentation semi-simple de $G_\mathbf{Q}$ dont la trace est $t_\mathbb{T}$ modulo $\mathfrak{p}$ où $t_\mathbb{T}$ est le pseudo-caractère de la rem. 9.5. On dit que $\mathfrak{p}$ est *générique* si :

- $\rho_\mathfrak{p}$ est irréducible,
- l'opérateur de Sen de la restriction de $\rho_\mathfrak{p}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas scalaire.

Remarque 11.8. — La première condition est vérifiée en dehors d'un fermé de codimension 1 et la seconde en dehors d'un fermé de codimension 2 (car, d'après Pan [**51**, th. 6.2.2], la seconde condition implique que $\rho_\mathfrak{p}$ est un twist d'une représentation d'image finie).

Théorème 11.9. — *Soit $W \subset H^1_{\text{proét},c}(\widehat{X}^{(p)}(0)_C^\times, L)$ un sous-L-module fermé, stable par $\mathbb{T}$, $G_\mathbf{Q}$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$. On suppose que, $W[\mathfrak{p}] = 0$ pour tout $\mathfrak{p}$ non générique. Alors la restriction de $\mathscr{K}_H^\mathbb{G}$ à W est injective.*

Démonstration. — Soit $W_0 \subset W$ le noyau de $\mathscr{K}_H^\mathbb{G}$. Alors W_0 est un sous-L-module fermé, stable par $\mathbb{T}$, $G_\mathbf{Q}$, $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ et $\mathbb{P}(\mathbf{A}^{]p[})$. Si $W_0 \neq 0$, il existe N premier à p tel que $W_0(Np^\infty) := W_0 \cap \widehat{H}^1_c(Np^\infty)$ soit non nul. Alors $W_0(Np^\infty)$ est une représentation admissible de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ et donc contient une représentation irréductible π. De plus, $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)}(\pi, W_0(Np^\infty))$ est un $\mathbb{T}$-module ($\mathbb{T}$ agissant à travers $\mathbb{T}(Np^\infty)$), de type fini sur L par admissibilité de $W_0(Np^\infty)$. Il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{T}[\frac{1}{p}]$ tel que $M[\mathfrak{p}] \neq 0$, et $\mathfrak{p}$ est générique grâce à l'hypothèse faite sur W. En particulier, $\rho_\mathfrak{p}$ est irréductible, et donc $M[\mathfrak{p}]$ est $\rho_\mathfrak{p}$-isotypique, en tant que $G_\mathbf{Q}$-module. On en déduit que W_0 contient une copie de $\rho_\mathfrak{p} \otimes \pi$.

La classification [**53, 19**] des représentations unitaires irréductibles de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ et [**13**, § V.4, n° 4] impliquent qu'il existe un caractère de $\kappa = \kappa_1 \otimes \kappa_2$ de $\mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$ et $v \in \pi$, non nul, tels que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot v = \kappa_1(a)\kappa_2(d)\, v$, pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{B}(\mathbf{Z}_p)$. Le cor. 11.5 combiné avec la prop. 11.6 implique alors que l'opérateur de Sen de $\rho_\mathfrak{p}$ est $-w(\kappa_2)$, ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle $\mathfrak{p}$ est générique (et donc que cet opérateur de Sen n'est pas scalaire).

Ceci permet de conclure. $\square$

Remarque 11.10. — On peut prouver le même énoncé en supposant seulement que $\rho_\mathfrak{p}$ est irréductible pour tout $\mathfrak{p}$ tel que $W(\mathfrak{p}) \neq 0$ mais la preuve (cf. preuve du th. 13.13) utilise un argument de « prolongement analytique » et le résultat de Pan mentionné dans la rem. 11.8.

12. Quelques conséquences de l'injectivité du modèle de Kirillov

Dans ce chapitre, on explique comment déduire de l'injectivité du modèle de Kirillov une compatibilité local-global (th. 12.4) pour la correspondance de Langlands locale p-adique. Cela fournit une compatibilité entre les correspondances de Langlands locale p-adique et classique (th. 12.6) et une preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur (en dimension 2, pour les représentations impaires) sous des conditions assez faibles (th. 12.8).

12.1. Compatibilité local-global

Soit $N \geq 1$, premier à p, et soit S l'ensemble des nombres premiers divisant Np. On note $\widehat{\Gamma}(Np^\infty) \subset \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ le groupe

$$\widehat{\Gamma}(Np^\infty) = \cap_{k\geq 1}\widehat{\Gamma}(Np^k).$$

C'est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$. Le groupe

$$H^1(Np^\infty) := H^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}\big(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty), \mathscr{O}_L\big)\big)$$

s'identifie à la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires de niveaux Np^k, pour $k \geq 1$. La comparaison avec la cohomologie étale le munit d'une action de $G_{\mathbf{Q}}$ qui est non ramifiée en dehors de S, et donc se factorise à travers le quotient $G_{\mathbf{Q},S}$ de $G_{\mathbf{Q}}$. Il est aussi muni d'une action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ (induite par l'action naturelle sur $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)$ par translation à droite), et est admissible en tant que représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$. Ces deux actions commutent. La limite inductive

$$H^1(0)^{(p)} := \varinjlim_N H^1(Np^\infty) = H^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}\big(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L\big)\big)$$

est munie d'actions de $G_{\mathbf{Q}}$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ qui commutent.

Soit Γ un sous-groupe de $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$. Si W est un $L[\Gamma]$-module, et si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\mathbb{T}$, on pose

$$\mathbf{m}(W) := \mathrm{Hom}_\Gamma(W, L \otimes H^1(0)^{(p)}), \qquad \mathbf{m}(W, Np^\infty) := \mathrm{Hom}_\Gamma(W, L \otimes H^1(Np^\infty))$$
$$\mathbf{m}(W)_\mathfrak{m} := \mathrm{Hom}_\Gamma(W, L \otimes H^1(0)^{(p)}_\mathfrak{m}), \quad \mathbf{m}(W, Np^\infty)_\mathfrak{m} := \mathrm{Hom}_\Gamma(W, L \otimes H^1(Np^\infty)_\mathfrak{m})$$

Si Γ' est un sous-groupe de $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ commutant à Γ, ces modules sont des $L[\Gamma']$-modules et on a

$$\mathbf{m}(W) = \varinjlim_N \mathbf{m}(W, Np^\infty) \quad \text{et} \quad \mathbf{m}(W)_\mathfrak{m} = \varinjlim_N \mathbf{m}(W, Np^\infty)_\mathfrak{m}$$

Remarque 12.1. — (i) Si ρ une L-représentation de $G_{\mathbf{Q}}$, de dimension finie, alors $\mathbf{m}(\rho, Np^\infty)$ est une L-représentation admissible de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$.

(ii) Si Π est une L-représentation admissible de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, de longueur finie, alors $\mathbf{m}(\Pi, Np^\infty)$ est une L-représentation de $G_{\mathbf{Q}}$, de dimension finie.

Définition 12.2. — Supposons W absolument irréductible. On dit que W est :

• *promodulaire* (resp. $\mathfrak{m}$-*promodulaire*), si $\mathbf{m}(W) \neq 0$ (resp. $\mathbf{m}(W)_{\mathfrak{m}} \neq 0$) ;

• *visible* (resp. $\mathfrak{m}$-*visible*) si W est promodulaire (resp. $\mathfrak{m}$-promodulaire) et $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est injective sur $\mathbf{m}(W) \otimes W$ (resp. sur $\mathbf{m}(W)_{\mathfrak{m}} \otimes W$) vu comme sous-objet de $H^1(0)^{(p)}$ par l'évaluation.

Remarque 12.3. — (i) la promodularité de $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$, *impaire et non ramifiée en dehors d'un nombre fini de places*, est quasi-automatique [**27**, th.1.2.3].

(ii) Il faut penser à « visible » comme « détecté par le modèle de Kirillov ». Les résultats d'injectivité pour $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ des chap. 10 et 11 montrent que les représentations invisibles sont difficiles à exhiber :

• Si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, alors « $\mathfrak{m}$-promodulaire $\Rightarrow$ $\mathfrak{m}$-visible ».

• Si $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est absolument irréductible et si l'opérateur de Sen de $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ n'est pas scalaire, alors « ρ promodulaire $\Rightarrow$ ρ visible ». (En particulier, si ρ est de Rham, à poids de Hodge-Tate distincts, et si ρ est promodulaire, alors ρ est visible.)

Théorème 12.4. — *Soit $\rho : G_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ absolument irréductible, visible, et soit Π une composante irréductible du $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-socle de $\mathbf{m}(\rho)$.*

(i) *Il existe une flèche $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante $\mathbf{V}(\Pi) \to \rho^*$, non nulle.*

(ii) *De plus :*

• *Si $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ est absolument irréductible, $\rho^* \cong \mathbf{V}(\Pi)$ et $\Pi \cong \Pi_p(\rho^*)$.*

• *Si $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ est une extension non triviale de χ_2 par χ_1, alors Π est le socle de $\Pi_p(\rho^*)$, i.e. $B(\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1})$.*

• *Si $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}} = \chi_1 \oplus \chi_2$, alors Π est une des composantes du socle de $\Pi_p(\rho^*)$, i.e. $B(\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1})$ ou $B(\chi_2^{-1}, \chi_1^{-1})$.*

(Dans les deux cas, si $\chi_2 = (x|x|)\chi_1$, il faut remplacer $B(\chi_1^{-1}, \chi_2^{-1})$ par $\mathrm{St} \otimes \chi_2^{-1}$.)

Démonstration. — Comme ρ est supposée visible, $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est injective sur $\Pi \otimes \rho$. En particulier, il existe $v \in \Pi \otimes \rho$ telle que $\mathscr{K}_{H,v}$ ne soit pas identiquement nulle. Si $\mathscr{K}_{H,v}(x) \neq 0$, la restriction de $\mathscr{K}_H$ à $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{]p[} \star (\Pi \otimes \rho)$ (isomorphe à $\Pi \otimes \rho$ comme $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-module) n'est pas identiquement nulle, et il résulte de la rem. 9.10 que $v \mapsto \mathscr{K}_{H,v}(1)$ fournit une flèche $G_{\mathbf{Q}_p} \times \left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{Z}} & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariante $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{]p[} \star (\Pi \otimes \rho) \to \widetilde{\mathbf{B}}^-$, non nulle. Le (i) est donc une conséquence de la prop. 2.16.

Pour prouver le (ii), on utilise le fait que $\mathbf{V}(\Pi)$ est irréductible (rem. 2.17). On en déduit directement le cas où la restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est irréductible.

Si la semi-simplifiée de $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ est $\chi_1 \oplus \chi_2$, commençons par remarquer que l'irréductibilité de Π et l'existence d'une flèche non nulle $\rho^* \to \mathbf{V}(\Pi)$ implique que $\mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 1, et donc que Π est une composante de Jordan-Hölder de dimension infinie d'une série principale $B(\delta_1, \delta_2)$. Dans le cas d'une extension non triviale, $\mathbf{V}(\Pi)$ est le quotient χ_1^{-1} de ρ^* (dans le cas scindé, c'est soit χ_1^{-1}, soit χ_2^{-1}), et donc $\delta_1 = \chi_1^{-1}$. On détermine δ_2 en utilisant le lien entre le caractère central et le déterminant (cf. rem. 9.5), et donc $\delta_2 = \chi_2^{-1}$. Le résultat s'en déduit en utilisant le fait que les séries principales sont irréductibles sauf si $\delta_2 = (x|x|)^{-1}\delta_1$, auquel cas la seule composante de Jordan-Hölder de dimension infinie est $\mathrm{St}\otimes\delta_2$. □

12.2. Applications

12.2.1. Adhérence des vecteurs localement algébriques

Proposition 12.5. — *Soit π cohomologique de poids $(k+2, j+1)$ avec $m_{\text{ét}}(\pi)$ visible. Soient $\pi^{\text{alg}} = \pi\otimes W_{k,j}^*$ et W l'adhérence de l'image de*

$$\iota_\pi : m(\pi)\otimes\pi^{\text{alg}} \to H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}_p(\pi)))$$

Alors, en tant que $G_{\mathbf{Q}}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-représentation, $W\cong m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\pi^{]p[}\otimes W_p$, où W_p est la composante du socle de $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ ayant des vecteurs algébriques non nuls. En particulier :

- *Si $m_{\text{ét}}(\pi)_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ est irréductible, $W\cong m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\pi^{]p[}\otimes\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$.*
- *Si $m_{\text{ét}}(\pi)_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ est une extension non triviale de deux caractères, alors $W\cong m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\pi^{]p[}\otimes\mathrm{soc}(\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)))$.*

Démonstration. — $m_{\text{ét}}(\pi)$ est irréductible, et donc $\mathbf{m}(m_{\text{ét}}(\pi))\otimes m_{\text{ét}}(\pi)\to H^1(0)^{(p)}$ est injective, W est inclus dans l'image et est de la forme $m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\pi^{]p[}\otimes W'$, où W' est une représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, complétée de π_p^{alg}, et $\pi^{]p[}\otimes W'\subset\mathbf{m}(m_{\text{ét}}(\pi))$. Par ailleurs, W' est admissible car $m_{\text{ét}}(\pi)\otimes v_\pi^{]p[}\otimes W'$ s'injecte dans $H^1(Np^\infty)$ pour N bien choisi, et $H^1(Np^\infty)$ est admissible. En particulier, W' contient des sous-représentations irréductibles.

Soit Π une composante irréductible du $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-socle de W'. Il résulte du th. 12.4 que Π est une composante du socle de $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ (et est égal à ce socle sauf si la restriction de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est la somme de deux caractères).

Maintenant, comme $m_{\text{ét}}(\pi)$ est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))^{\text{alg}}\neq 0$ et, plus précisément, $(\mathrm{soc}(\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))))^{\text{alg}}\neq 0$; on a donc $\Pi^{\text{alg}}\neq 0$. Comme $m_{\text{ét}}(\pi)\otimes\pi^{]p[}\otimes\Pi^{\text{alg}}$ s'injecte dans $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$, on déduit de la prop. 7.6 que $\Pi^{\text{alg}}\cong\pi_p^{\text{alg}}$. Comme Π est fermée, et π_p^{alg} est dense dans W', l'injection de Π dans W' est une égalité.

Cela prouve le résultat sauf si la restriction de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est la somme de deux caractères. Dans ce cas, le socle de $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)))$ a deux composantes W_1, W_2, avec $W_1^{\text{alg}}\neq 0$ et $W_2^{\text{alg}}=0$. Si le socle de W' a une composante isomorphe à W_1, on conclut comme ci-dessus que $W=W_1$. Sinon, le socle de W' est une somme de copies de W_2 qui est une série principale $B(\delta_1,\delta_2)$. Comme W' est admissible, la théorie des blocs pour les banachs admissibles [**53, 54**] implique que les composantes de Jordan-Hölder de W' appartiennent au bloc de $B(\delta_1,\delta_2)$ qui est constitué de $B(\delta_1,\delta_2)$ et des composantes de Jordan-Hölder de $B(\delta_2,\delta_1)$ (à savoir W_1 plus un caractère éventuel). Il s'ensuit que π_p^{alg} (qui s'injecte dans W' et qui est irréductible) est isomorphe à W_1^{alg} et donc le complété universel de π_p^{alg} est W_1 (car W_1 est une série principale unitaire).

Comme W' est, par construction, un quotient de ce complété universel, on en déduit que $W' = W_1$, ce qui permet de conclure. □

12.2.2. Compatibilité classique versus p-adique

Théorème 12.6. — (cf. [**27**, § 7.4]) *Si V est une L-représentation de dimension* 2 *de $G_{\mathbf{Q}_p}$, de Rham à poids de Hodge-Tate $a < b$, alors*

$$\Pi_p(V)^{\mathrm{alg}} \cong \Pi_p(V)^{\mathrm{cl}} \otimes W^*_{b-a-1,b}$$

Démonstration. — Soit $\pi_p = \Pi_p(V)^{\mathrm{cl}}$. Le résultat est prouvé dans [**13**, th. VI.6.50] dans le cas où π_p est de la série principale (voir aussi [**14, 46**]). Il suffit donc de le prouver dans le cas π_p supercuspidale et, compte-tenu de la compatibilité à la torsion par un caractère, il suffit, d'après [**15**], pour chaque telle π_p, d'exhiber une représentation V, de Rham, vérifiant $\mathrm{LL}(V) = \pi_p \otimes \eta$, pour laquelle $\Pi_p(V)^{\mathrm{alg}} = \pi_p \otimes \eta \otimes W^*_{k,j}$ (pour un choix de (k, j) et de caractère lisse η).

Quitte à remplacer π_p par $\pi_p \otimes \eta$, on peut supposer que π_p est la composante en p d'une représentation π cohomologique. La prop. 12.5 permet de prendre $V = m^*_{\text{ét}}(\pi)$, à condition que $m_{\text{ét}}(\pi)$ soit visible (ce qui est le cas, d'après la rem. 12.3 puisque cette représentation est modulaire par définition). □

12.2.3. Représentations ordinaires. — Si Π est une représentation unitaire de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, irréductible et visible, l'injectivité de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ sur $\mathbf{m}(\Pi, Np^\infty) \otimes \Pi$ et l'irréductibilité de $\mathbf{V}(\Pi)$ impliquent, par les mêmes méthodes (en particulier, l'utilisation de la prop. 2.16) que le $G_{\mathbf{Q}_p}$-cosocle de la restriction de $\mathbf{m}(\Pi, Np^\infty)$ est une somme finie de copies de $\mathbf{V}(\Pi)^*$. En particulier :

• $\mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension ≤ 2 (cas particulier d'un théorème de Paškūnas [**53**] – voir aussi [**19**]) puisque le $G_{\mathbf{Q}}$-cosocle de $\mathbf{m}(\Pi, Np^\infty)$ est constitué de représentations de $G_{\mathbf{Q}}$ de dimensions ≤ 2 (d'après les relations d'Eichler-Shimura).

• Si Π est une série principale $B(\delta_1, \delta_2)$ (ou $\mathrm{St} \otimes \delta_1$), alors le $G_{\mathbf{Q}_p}$-cosocle de $\mathbf{m}(\Pi, Np^\infty)$ est une somme de copies de δ_1^{-1}.

On démontre de même le résultat suivant.

Proposition 12.7. — (cf. [**27**, § 5.6]) *Soit π cohomologique de poids $(k+2, j)$ tel que π_p soit une série principale $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes |\ |_p^{-1}\delta_2)$ (ou $\mathrm{St} \otimes \delta_1$ si $\delta_2 = |\ |_p\delta_1$), où $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ sont des caractères lisses avec $v_p(\delta_1(p)) = 0$ et $v_p(\delta_2(p)) = k+1$* (cas ordinaire). *Alors, la restriction de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est une extension de $x^{-k-1}\delta_2^{-1}$ par δ_1^{-1}.*

Démonstration. — Soit $\Pi := \pi_p^{\mathrm{alg}} = B(x^{k+1}\delta_2, \delta_1)$, et donc $\mathbf{V}(\Pi)^* = x^{-k-1}\delta_2^{-1}$. Alors $m_{\text{ét}}(\pi)$ est une sous-représentation de $\mathbf{m}(\Pi)$ et donc $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ est injective sur $m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi$. Comme ci-dessus, on en déduit que le cosocle de la restriction de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est $x^{-k-1}\delta_2^{-1}$. On conclut en utilisant la relation entre caractère central et déterminant (rem. 9.5). □

12.2.4. Conjecture de Fontaine-Mazur

Théorème 12.8. — (cf. [**27**, § 7.1]) *Soit $\rho : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(L)$, absolument irréductible, impaire, visible, dont la restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts et n'est pas la somme de deux caractères. Alors ρ est la représentation associé à une forme modulaire.*

Démonstration. — L'hypothèse implique que le socle de $\Pi_p(\rho^*)$ n'a qu'une composante, et l'hypothèse « de Rham à poids de Hodge-Tate distincts » implique [**13**, th. V.6.18] (voir aussi [**23, 15**]) que cette composante contient des vecteurs localement algébriques).

Maintenant, si ρ est visible, le socle de $\mathbf{m}(\rho)$ (vu comme représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$) contient le socle de $\Pi_p(\rho^*)$ d'après le th. 12.4, et donc $\mathbf{m}(\rho)^{\mathrm{alg}} \neq 0$. Ceci fournit une injection $G_\mathbf{Q} \times \mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante $\mathbf{m}(\rho)^{\mathrm{alg}} \otimes \rho \hookrightarrow H^1(0)^{(p)}$. On conclut grâce à la décomposition (7.5) des vecteurs localement algébriques de la cohomologie complétée. □

Remarque 12.9. — Il faut d'autres outils que le simple modèle de Kirillov pour supprimer la condition selon laquelle $\rho_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ n'est pas la somme de deux caractères. On pourrait conclure par passage à la limite en approximant ρ par des représentations dont un des poids tend vers $+\infty$ pour montrer que les deux morceaux du socle de $\Pi_p(\rho^*)$ apparaissent dans le socle de $\mathbf{m}(\rho)$. Le cas général a été démontré par Pan [**50, 52**].

13. La cohomologie complétée et sa factorisation

Dans ce chapitre, on raffine la factorisation d'Emerton [**27**, conj. 6.1.6 et th. 6.4.16] de la cohomologie complétée. Ce raffinement (th. 13.11 et 13.13) est obtenu en comparant les modèles de Kirillov des deux membres aux points classiques (th. 13.3 et 13.7, cor. 13.10) grâce à la loi de réciprocité explicite du th. 8.14.

13.1. Notations

13.1.1. Algèbres de Hecke et représentations galoisiennes. — Soit $T(Np^\infty)$ le quotient à travers lequel $\mathbb{T}$ agit sur $H^1(Np^\infty)$; c'est l'algèbre de Hecke engendrée par les opérateurs de Hecke T_ℓ, pour $\ell \notin S$, agissant sur $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)/\mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell))$; on ne change pas $T(Np^\infty)$ en enlevant un nombre fini de ces opérateurs de Hecke. Cette action commute à celle de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ et de $G_\mathbf{Q}$.

L'algèbre $T(Np^\infty)$ est une algèbre semi-locale. Dans la suite, nous fixons un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $T(Np^\infty)$, et notons T la localisée

$$T := T(Np^\infty)_\mathfrak{m}$$

de $T(Np^\infty)$ en $\mathfrak{m}$ (c'est un facteur direct de $T(Np^\infty)$). Alors T est une algèbre locale, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $T_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}$ fini de caractéristique p (et donc de la forme $\mathbf{F}_q$, avec q une puissance de p).

On note t_T la composition du pseudocaractère $t_\mathbb{T}$ avec la projection $\mathbb{T} \to T$ et $t_\mathfrak{m}$ la réduction de t_T modulo $\mathfrak{m}$. On dit que $\mathfrak{m}$ est *non-eisenstein* si $t_\mathfrak{m}$ est la trace d'une représentation irréductible de dimension 2. Si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, il existe

$$\rho_T : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathrm{GL}_2(T)$$

dont la trace est t_T ; la trace de la réduction $\overline{\rho}_T$ de ρ_T modulo $\mathfrak{m}$ est alors $t_\mathfrak{m}$.

On définit (« classique » signifie que ρ_x est la représentation associée à une forme modulaire à torsion près par une puissance entière du caractère cyclotomique) :

$$\mathscr{X} := \mathrm{Spec}(T) \quad \text{et} \quad \mathscr{X}^{\mathrm{cl}}(\mathscr{O}_L) := \{x \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L),\ x \text{ classique}\}.$$

Soit $H^1(Np^\infty)$ le groupe défini au § 12.1 et soit $H^1(Np^\infty)_\mathfrak{m}$ son localisé en $\mathfrak{m}$ (c'est un facteur direct de $H^1(Np^\infty)$). On note $H^1[\rho_T]_S$ le sous-$\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-module de $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ engendré par $H^1(Np^\infty)_\mathfrak{m}$. C'est un $G_{\mathbf{Q},S} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-module à l'intérieur duquel on récupère $H^1(Np^\infty)_\mathfrak{m}$ en prenant les points fixes par $\widehat{\Gamma}(Np^\infty)$. La structure de ce $G_{\mathbf{Q},S} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-module a été analysée par Emerton **[27]** ; nous donnons une version renforcée du résultat d'Emerton dans les th. 13.11 et 13.13 cidessous.

13.1.2. Spécialisation. — Si $x \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, on note $\mathfrak{p}_x$ l'idéal premier correspondant ; alors $\rho_x = (T/\mathfrak{p}_x) \otimes_T \rho_T$. On a

$$\Pi_\ell(\rho_x^*) = (T/\mathfrak{p}_x) \otimes_T \Pi_\ell(\rho_T^\diamond),\ \text{si } \ell \neq p, \quad \Pi_p(\rho_x^*) = \Pi_p(\rho_T^\diamond)[\mathfrak{p}_x].$$

(Donc $\Pi_p^*(\rho_x^*) = (T/\mathfrak{p}_x) \otimes_T \Pi_p^*(\rho_T^\diamond)$.) On pose :

$$v'_{T,S} = \otimes_{\ell \in S \smallsetminus \{p\}} v'_{T,\ell}, \quad v'_{x,S} = \otimes_{\ell \in S \smallsetminus \{p\}} v'_{x,\ell}.$$

Donc $v'_{x,S}$ est la spécialisation de $v'_{T,S}$ dans $\otimes_{\ell \in S \smallsetminus \{p\}} \Pi_\ell(\rho_x^*)$.

Remarque 13.1. — Si $x \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, alors

$$\rho_x \otimes v'_{x,S} \otimes \Pi_p(\rho_x^*) = \big(\rho_T \otimes v'_{T,S} \otimes \Pi_p(\rho_T^\diamond)\big)[\mathfrak{p}_x]$$

Remarque 13.2. — Soit $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl}}(\mathscr{O}_L)$, correspondant à une représentation cohomologique π : on a un isomorphisme $\rho_x \cong m_{\text{ét}}(\pi)$, et $\Pi_\ell(m_{\text{ét}}^*(\pi)) = \pi_\ell$, si $\ell \neq p$.

(i) L'isomorphisme $\rho_x \cong m_{\text{ét}}(\pi)$ n'est unique qu'à multiplication près par une unité de L (ou $\mathscr{O}_L$ si on fait plus attention), mais $\rho_x \otimes \Pi_p(\rho_x^*) = m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ car le passage au dual et la fonctorialité de Π_p font que les indéterminations se compensent. On peut donc voir $m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ comme un sous-objet de $\rho_T \otimes_T \Pi_p(\rho_T^\diamond)[\frac{1}{p}]$.

(ii) Si π est de poids $(k+2, j+1)$, on dispose (par définition de $m_{\text{ét}}(\pi)$) d'une flèche naturelle $G_{\mathbf{Q},S} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariante :

$$\iota_\pi : m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \pi^{\mathrm{alg}} \to \underrightarrow{H}^1(W_{k,j}^{\text{ét}}) \otimes W_{k,j}^* \hookrightarrow H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)).$$

13.2. Une loi de réciprocité explicite

Si $c\in H^1_{\text{proét}}(Z(0)^\times_C,\mathbb{B}^+_{\text{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}W^{\text{et}}_{k,j})$ et $\check v\in W^*_{k,j}$, alors
$$\langle\check v,c\rangle\in H^1_{\text{proét}}(Z(0)^\times_C,\mathbb{B}^+_{\text{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}\text{Alg})$$
et on note $\log_B(c\otimes\check v)$ son image dans $\mathbf{B}^-_{\text{dR}}\{\tilde q\}$ par l'application du n° 8.3.2 (un élément de $H^1_{\text{proét}}(Z(0)^\times_C,\mathbb{B}^+_{\text{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}\text{Alg})$ est défini sur $Z(N)$ pour N assez petit (multiplicativement), et $Z(N)$ est une boule ouverte).

Théorème 13.3. — *Si $f\in\text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}}\otimes\underrightarrow{H}^0(W^{\text{dR}}_{k+2,j+1}))$, et si l'on note $\iota_{\text{ES},p}(f)_{Z(0)}$ la restriction de $\iota_{\text{ES},p}(f)\in\underrightarrow{H}^1_{\text{proét}}(\mathbb{B}^+_{\text{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}W^{\text{et}}_{k,j})$ à $Z(0)_C$, alors*
$$\log_B\big(\iota_{\text{ES},p}(f)_{Z(0)}\otimes\tfrac{(e_1^*)^{k-\ell}(e_2^*)^\ell}{\ell!(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\big)=(-1)^{k-j}t^{k-j-\ell}\partial_q^{-1-\ell}\big(\text{Hol}(f)\otimes v_1^{-k-2}\zeta_{\text{dR}}^{-j-1}\big)(\tilde q)$$
dans[25] $\mathbf{B}^-_{\text{dR}}\{\tilde q\}$.

Démonstration. — On choisit N tel que f soit de niveau N. Pour calculer $\iota_{\text{ES},p}(f)_{Z(0)}$, on doit résoudre l'équation différentielle $\nabla g=f$ sur $Z(N)_C$. Une solution naturelle est [26]
$$g=-\sum_{n\geq1}\partial^{n-1}\tfrac{f}{\zeta_{\text{dR}}v_1^2}\tfrac{(-u)^n}{n!}$$
car, quand on applique ∇, les termes se compensent deux par deux, et il ne reste que le morceau $\frac{f}{\zeta_{\text{dR}}v_1^2}\frac{du}{1!}=f$ (cf. (6.8)) du terme pour $n=1$.

Le 1-cocycle sur le π_1 de $Z(N)_C$ définissant $\iota_{\text{ES},p}(f)_{Z(0)}$ est alors $\sigma\mapsto(\sigma-1)g$, mais il est apparent sur la formule définissant g que cette action se factorise par $\mathbb{U}(N\widehat{\mathbf{Z}})$ et que ce cocycle est complètement déterminé par sa valeur sur le générateur γ^N de $\mathbb{U}(N\widehat{\mathbf{Z}})$.

Si $F=\partial^{-1}\frac{f}{\zeta_{\text{dR}}v_1^2}$, on a
$$\begin{aligned}\gamma^N(g)-g&=\sum_{n\geq0}\partial^nF(q)\big(\tfrac{(-u-Nt)^n}{n!}-\tfrac{(-u)^n}{n!}\big)\\&=F(qe^{-u-Nt})-F(qe^{-u})=F(\tilde qe^{-Nt})-F(\tilde q)=(\gamma^N-1)\cdot F(\tilde q)\end{aligned}$$
(Le passage de la première ligne à la seconde est la formule de Taylor logarithmique : $\partial:=\frac{\nabla}{du}=q\frac{dq}{q}$ et $u=\log(q/\tilde q)$; on obtient donc les valeurs en $qe^{-u}=\tilde q$ et $qe^{-u-Nt}=\tilde qe^{-Nt}=\gamma^N(\tilde q)$. En particulier, $v_1(\tilde qe^{-Nt})=v_1(\tilde q)=-te_1$: comme $v_1(q)=ue_2-te_1$, et $v_2(q)=e_2$, on a $\sum_{n\geq0}(\frac{\nabla}{du})^nv_1\frac{(-u)^n}{n!}=v_1-u\frac{\nabla}{du}v_1=(ue_2-te_1)-ue_2=-te_1$.)

On peut écrire f, sur $Z(0)$, sous la forme
$$f=\sum_{i=0}^k t^{i-(k+1-j)}f_i\otimes v_1^{k+2-i}v_2^i\zeta_{\text{dR}}^{j+1},$$

25. On fera attention qu'il peut y avoir des puissances négatives de t dans $\text{Hol}(f)$; plus précisément, il faut multiplier $\text{Hol}(f)$ par t^{k+1-j} pour avoir une série à coefficients dans $\mathbf{B}^+_{\text{dR}}$.

26. Voir les n$^{\text{os}}$ 6.4.4 et 6.2.4 pour les notations.

avec $f_i \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\{q\}$. Une intégration par partie (on intègre $\partial_q^{-i} f$ et on dérive $v_1^{k-i} v_2^i$) fournit la formule

$$F = \sum_{i=0}^{k} t^{i-(k+1-j)} \Big(\sum_{r=0}^{k-i} (-1)^r \tfrac{(k-i)!}{(k-i-r)!} \partial_q^{-1-r} f_i \otimes v_1^{k-i-r} v_2^{i+r} \zeta_{\mathrm{dR}}^j \Big)$$

Pour évaluer en $\tilde q$, on utilise la formule $v_1(\tilde q) = -te_1$ et $v_2 = e_2$.

Maintenant, il résulte du lemme 8.15 que $\log_B(\iota_{\mathrm{ES},p}(f)_{Z(0)} \otimes \check v) = \langle \check v, F(\tilde q)\rangle$. On en déduit, en utilisant les formules $\langle (e_1^* \wedge e_2^*)^{-j}, \zeta_{\mathrm{dR}}^j\rangle = (-t)^{-j}$,

$$\langle (e_1^*)^\ell (e_2^*)^{k-\ell}, e_1^i e_2^{k-i}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq \ell, \\ \frac{\ell!\,(k-\ell)!}{k!} & \text{si } i = \ell, \end{cases}$$

(par définition $\langle \check v_1 \cdots \check v_k, v_1 \cdots v_k\rangle = \frac{1}{k!} \sum_\sigma \langle \check v_1, v_{\sigma(1)}\rangle \cdots \langle \check v_k, v_{\sigma(k)}\rangle$), que l'on a

$$\log_B\big(\iota_{\mathrm{ES},p}(f)_{Z(0)} \otimes \tfrac{(e_1^*)^{k-\ell}(e_2^*)^\ell}{\ell!\,(e_1^* \wedge e_2^*)^j}\big) = \tfrac{1}{\ell!} \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{k-i-j} t^{-1-\ell+i} \tfrac{(k-i)!}{(k-\ell)!} \partial_q^{-1-\ell+i} f_i \tfrac{\ell!\,(k-\ell)!}{k!}.$$

(La formule ci-dessus fait que seuls les termes avec $r = \ell - i$ contribuent ; l'exposant de t est $(i-(k+1-j)) + (k-i-r) + (-j)$, le second terme venant de v_1^{k-i-r} et le troisième de $\langle (e_1^* \wedge e_2^*)^{-j}, \zeta_{\mathrm{dR}}^j\rangle$; l'exposant de (-1) est $r + (k-i-r) + (-j)$, le second terme venant de v_1^{k-i-r} et le troisième de $\langle (e_1^* \wedge e_2^*)^{-j}, \zeta_{\mathrm{dR}}^j\rangle$.) La somme ci-dessus ne change pas, dans $\mathbf{B}^-_{\mathrm{dR}}\{\tilde q\}$, si on remplace $\sum_{i=0}^{\ell}$ par $\sum_{i=0}^{k}$ car l'exposant de t est ≥ 0 si $i \geq \ell + 1$. Le résultat s'en déduit donc en comparant la formule ci-dessus (après simplification) avec celle de la prop. 6.9. □

Remarque 13.4. — On aurait pu simplifier un peu le calcul en utilisant le fait que $\iota_{\mathrm{ES},p}$ se factorise à travers la projection holomorphe, mais il est rassurant de voir ceci apparaître sur le calcul.

13.3. Les vecteurs localement algébriques de la cohomologie complétée

13.3.1. q-développements. — Soit $\Lambda = L, \mathscr{O}_L$. On pose (cf. n° 8.3.3) :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^* := \varinjlim_{(N,p)=1} \widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q^{1/N}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*, \quad \Lambda \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^* := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} (\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde q^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)$$

Le sous-groupe

$$\widetilde G_{\mathbf{Q}} = \{(\sigma, g) \in G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{P}(\mathbf{A}^{]\infty[}),\ \det g = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}(\sigma)\} = \big\{\big(\begin{smallmatrix} \sigma & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big),\ \sigma \in G_{\mathbf{Q}},\ b \in \mathbf{A}^{]\infty[}\big\}$$

de $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ stabilise $Z(0)_C$. On note $\widetilde G_{\mathbf{Q}_p}$ le sous-groupe de $\widetilde G_{\mathbf{Q}}$,

$$\widetilde G_{\mathbf{Q}_p} = \big\{\big(\begin{smallmatrix} \sigma & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big),\ \sigma \in G_{\mathbf{Q}_p},\ b \in \mathbf{Q}_p\big\}$$

Notons que $\widetilde G_{\mathbf{Q}_p}$ admet $G_{\mathbf{Q}_p}$ et $\big(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$ comme quotients.

• *L'application ι_q.*— D'après le (i) de la rem. 3.3 (avec $(\rho_T^\diamond)^\clubsuit = \rho_T^*$), on dispose d'une injection naturelle

$$\iota : \Pi_p(\rho_T^\diamond) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes_{\mathbf{Z}_p} \rho_T^*)^H$$

qui commute à l'action de $\mathbb{P}(\mathbf{Q}_p)$:

$$\iota\big(\big(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p \star v\big) = [\varepsilon^b]\varphi^k \circ \sigma_a(\iota(v)), \quad \text{si } k \in \mathbf{Z},\ a \in \mathbf{Z}_p^* \text{ et } b \in \mathbf{Q}_p. \tag{13.5}$$

On en déduit un accouplement naturel $\langle\ ,\ \rangle : \rho_T \otimes_T \Pi_p(\rho_T^\diamond) \to \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-$. Cela permet de définir

$$\iota_q : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond) \to \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$$

donnée, si $\gamma \in \rho_T$, $\phi^{]p[} \in \Pi^{]p[}(\rho_T^\diamond)$ et $v \in \Pi_p(\rho_T^\diamond)$, par

$$\gamma \otimes (\phi^{]p[} \otimes v) \mapsto \sum_{n>0,\, v_p(n)=0} \big\langle \gamma, \iota\big(\big(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p \star (\phi^{]p[}(n)v)\big)\big\rangle\, \tilde{q}^n.$$

Lemme 13.6. — *Alors ι_q est $\widetilde{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant, si on fait agir $\widetilde{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à travers $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur ρ_T, à travers $\big(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \subset \mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ sur $\Pi(\rho_T^\diamond)$, et par $\big(\begin{smallmatrix} \sigma & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot \big(\sum_n a_n \tilde{q}^n\big) = \sum_n \sigma(a_n)[\varepsilon^{nb}]\,\tilde{q}^n$.*

Démonstration. — En effet,

$$\big(\begin{smallmatrix} \sigma & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot (\gamma \otimes v) = \sigma(\gamma) \otimes \big(\begin{smallmatrix} \chi(\sigma) & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p \star v$$

tandis que (l'apparition de $\chi(\sigma) = \boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma)$ vient de la formule (13.5) ci-dessus)

$$\begin{aligned}\big(\begin{smallmatrix} \sigma & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) \cdot \big(\sum \big\langle \gamma, \iota\big(\big(\begin{smallmatrix} n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p \star \phi^{]p[}(n)v\big)\big\rangle\, \tilde{q}^n\big) &= \sum \big\langle \sigma(\gamma), \iota\big(\big(\begin{smallmatrix} \chi(\sigma)n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p \star \phi^{]p[}(n)v\big)\big\rangle [\varepsilon^{bn}]\, \tilde{q}^n \\ &= \sum \big\langle \sigma(\gamma), \iota\big(\big(\begin{smallmatrix} \chi(\sigma)n & bn \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p \star \phi^{]p[}(n)v\big)\big\rangle\, \tilde{q}^n\end{aligned}$$

□

• *Les applications* Res *et* $\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$.— Enfin, on note

$$\mathrm{Res} : H^1_{\text{ét}}(\widehat{X}^{(p)}(0)^\times_C, \mathbf{Z}_p) \to H^1_{\text{ét}}(\widehat{Z}^{(p)}(0)^\times_C, \mathbf{Z}_p)$$

l'application naturelle (de restriction), et on note encore $\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$ l'application

$$\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}} : H^1(\widehat{Z}^{(p)}(0)^\times_C, \mathbf{Z}_p) \to \widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$$

déduite de (8.9) en passant à la limite sur les revêtements $q \mapsto q^N$, pour $(N,p) = 1$. Alors ι_π est, par définition, $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-équivariante, Res est $\widetilde{G}_{\mathbf{Q}}$-équivariante et $\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$ est $\widetilde{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante.

13.3.2. Spécialisation aux points classiques. — Si π est cohomologique, la formule (2.9) et la compatibilité entre les correspondances locales p-adique et classique (th. 12.6) fournissent un isomorphisme

$$\iota_{\mathrm{dR}}^- : \pi_p^{\mathrm{alg}} \cong \Pi_p(m_{\text{ét}}(\pi)^*)^{\mathrm{alg}}, \quad v \mapsto v \otimes (\iota^-_{\mathrm{dR},\check{\pi}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}).$$

Comme $m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m^*_{\text{ét}}(\pi))$ est un sous-objet de $\rho_T \otimes_T \Pi_p(\rho_T^\diamond)[\frac{1}{p}]$ (cf. (i) de la rem. 13.2), cela fournit

$$\iota_q \circ \iota^-_{\mathrm{dR}} : m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \pi^{\mathrm{alg}} \to L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*.$$

Si π est de poids $(k+2, j+1)$, on dispose d'une flèche naturelle ((ii) de la rem. 13.2)

$$\iota_\pi : m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \pi^{\text{alg}} \to \underrightarrow{H}^1(W_{k,j}^{\text{ét}}) \otimes W_{k,j}^* \to H^1_{\text{ét}}(\widehat{X}^{(p)}(0)_C^\times, \mathbf{Q}_p)^{U-\text{fini}}.$$

Théorème 13.7. — *Si π est cohomologique de poids $(k+2, j+1)$, alors*

$$\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}} \circ \mathrm{Res} \circ \iota_\pi = (-1)^{k-j} \iota_q \circ \iota_{\text{dR}}^-.$$

Démonstration. — Les deux flèches tombent dans $(L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-[[\tilde{q}^{\mathbf{Q}_+}]] \boxtimes \mathbf{Z}_p^*)^{U-\text{fini}}$, ce qui permet de les composer avec l'injection κ_{dR} du n$^{\text{o}}$ 8.3.3, et il suffit de vérifier le même énoncé après composition avec κ_{dR}, auquel cas on peut étendre les deux membres par $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$-linéarité en des flèches $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \pi^{\text{alg}} \to L{\cdot}\mathbf{B}_{\text{dR}}^-\{\tilde{q}\}$.

Le lemme 13.8 ci-dessous montre qu'il suffit de vérifier que les deux flèches coïncident sur $t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+ \otimes \pi^{\text{alg}}$ (on a $t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+ \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes m_{\text{ét}}(\pi)$ et $t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+$ n'est pas divisible par t dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes m_{\text{ét}}(\pi)$). Par linéarité, on peut se restreindre à ϕ de la forme $\phi^{]p[} \otimes \phi_p \otimes \frac{(e_1^*)^{k-\ell}(e_2^*)^\ell}{\ell!\,(e_1^* \wedge e_2^*)^j}$ qui correspond à $\phi^{]p[} \otimes \phi_p X^{k-\ell-j}$ dans le modèle de Kirillov de π^{alg}.

• Par définition de l'application κ_{dR}, on a (le coefficient de $\tilde{q}^{p^k n}$ du membre de droite est vu comme un élément de $L{\cdot}\mathbf{B}_{\text{dR}}^-$ via l'inclusion $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{[\varepsilon^{p^k}]-1}, k \in \mathbf{Z}] \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}$) :

$$\kappa_{\text{dR}} \circ \iota_q(\gamma \otimes \phi^{]p[} \otimes v) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{n>0,\, v_p(n)=0} \big\langle \gamma, \phi^{]p[}(n)\iota\big(\big(\begin{smallmatrix} p^k n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)_p v\big)\big\rangle\, \tilde{q}^{p^k n}.$$

(L'apparition de $\big(\begin{smallmatrix} p^k n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)_p$ vient de ce que $\varphi^k(\iota(v)) = \iota(\big(\begin{smallmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)v)$, si $v \in \Pi_p(\rho_T^\diamond)$, et celle de $\tilde{q}^{p^k n}$ de ce que $\varphi^k(\tilde{q}^n) = \tilde{q}^{p^k n}$.) Maintenant, si $v \in \Pi_p(m_{\text{ét}}(\pi)^*)^{\text{alg}}$, alors $\iota\big(\big(\begin{smallmatrix} p^k n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)_p v\big) = \mathscr{K}_v(p^k n)$, par définition de $\mathscr{K}_v$ (cf. n$^{\text{o}}$ 2.3.1). On en déduit que

$$\iota\big(\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)_p \iota_{\text{dR}}^-(\phi_p X^{k-\ell-j})\big) = (xt)^{k-\ell-j}\phi_p(x)(\iota_{\text{dR},\check{\pi}}^- \otimes \zeta_{\text{dR}}).$$

Il s'ensuit que

$$\kappa_{\text{dR}} \circ \iota_q \circ \iota_{\text{dR}}^-(t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+ \otimes \phi) = t^{j-k-1}\langle \iota_{\text{dR},\pi}^+, \iota_{\text{dR},\check{\pi}}^- \otimes \zeta_{\text{dR}}\rangle \sum_{n>0} \phi^{]p[}(n)\phi_p(n)(nt)^{k-\ell-j}\tilde{q}^n.$$

Par définition, $\langle \iota_{\text{dR},\pi}^+, \iota_{\text{dR},\check{\pi}}^- \otimes \zeta_{\text{dR}}\rangle = 1$. Par ailleurs, si $a_n = n^{k+1-j}\phi(n)$, la série $\sum_{n>0} a_n q^n$ est le q-développement d'une forme modulaire f_ϕ, et on a

$$\begin{aligned}\kappa_{\text{dR}} \circ \iota_q \circ \iota_{\text{dR}}^-(t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+ \otimes \phi) &= t^{j-k-1}\sum\nolimits_{n>0} a_n n^{j-k-1}(tn)^{k-\ell-j}\tilde{q}^n \\ &= t^{-\ell-1}\partial_q^{-1-\ell} f_\phi\end{aligned}$$

• Le th. 8.14 permet de remplacer $\kappa_{\text{dR}} \circ \iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}$ par $\log_B$. L'application $\iota_\pi \circ t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+$ est la composée de [27] :

◇ $t^{j-k-1}\iota_{\text{dR},\pi}^+ \otimes \mathrm{id} : \pi^{\text{alg}} = \pi \otimes W_{k,j}^* \to t^{j-k-1}\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1}) \otimes W_{k,j}^*$,

◇ $\iota_{\text{ES},p} \otimes \mathrm{id} : t^{j-k-1}\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1}) \otimes W_{k,j}^* \to \underrightarrow{H}^1_{\text{proét}}(\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} W_{k,j}^{\text{ét}}) \otimes W_{k,j}^*$.

27. Notons que $t^{j-k-1}\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,j+1}) \subset \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes \underrightarrow{H}^0(W_{k+2,j+1}^{\text{dR}}))$.

La première envoie ϕ sur $\big(t^{j-k-1}f_\phi\otimes v_1^{k+2}\zeta_{\rm dR}^{j+1}\big)\otimes\frac{(e_1^*)^{k-\ell}(e_2^*)^\ell}{\ell!\,(e_1^*\wedge e_2^*)^j}$. Le th. 13.3 fournit alors la formule

$$\begin{aligned}\log_B(\mathrm{Res}(\iota_\pi\circ t^{j-k-1}\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}(\phi))) &= t^{j-k-1}(-1)^{k-j}t^{k-\ell-j}\partial_q^{-1-\ell}f_\phi\\ &=(-1)^{k-j}t^{-\ell-1}\partial_q^{-1-\ell}f_\phi\end{aligned}$$

(On a $\mathrm{Hol}(f_\phi\otimes v_1^{k+2}\zeta_{\rm dR}^{j+1})=f_\phi\otimes v_1^{k+2}\zeta_{\rm dR}^{j+1}$ puisque cette forme est holomorphe.)

Une comparaison des deux formules permet de conclure. □

On identifie $G_{\mathbf{Q}_p}$ au sous-groupe de $\widetilde G_{\mathbf{Q}_p}$ des $\big(\begin{smallmatrix}\sigma&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)$.

Lemme 13.8. — *Si $\alpha:\mathbf{B}^+_{\rm dR}\otimes m_{\rm ét}(\pi)\otimes\pi_p^{\rm alg}\to L{\cdot}\mathbf{B}^-_{\rm dR}$ est $\mathbf{B}^+_{\rm dR}$-linéaire et $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariant, et si $\alpha(t^{j-k-1}\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}\otimes\pi_p^{\rm alg})=0$, alors $\alpha=0$.*

Démonstration. — Les poids de $m_{\rm ét}(\pi)$ sont j et $j-k-1$. L'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\pi_p^{\rm alg}$ se factorise à travers $\big(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p^*&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)$, et on peut (après extension de L à $L(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$) décomposer $\pi_p^{\rm alg}$ comme une somme directe de repésentations de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de la forme $\eta\varepsilon_p^{i-j}$, où η est un caractère d'ordre fini et $0\le i\le k$. On en déduit que $m_{\rm ét}(\pi)\otimes\pi_p^{\rm alg}$ se décompose en représentations de dimension 2, de la forme $V_{i,\eta}=m_{\rm ét}(\pi)\otimes\eta\varepsilon_p^{i-j}$, dont un poids est ≥ 0 et l'autre est <0. La restriction de α à $V_{i,\eta}$ appartient à $(\mathbf{B}^-_{\rm dR}\otimes V^*_{i,\eta})^{G_{\mathbf{Q}_p}}$ qui est de dimension 1 car $V^*_{i,\eta}$ a un poids ≤ 0 et l'autre >0. Il s'ensuit que α est un multiple de $t^{i-j}G(\eta)(\iota^-_{\mathrm{dR},\check\pi}\otimes\zeta_{\rm dR})$. L'hypothèse implique que α s'annule sur $t^{j-k-1}G(\eta^{-1})\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}\in\mathbf{B}^+_{\rm dR}\otimes V_{i,\eta}$ et donc $\alpha=0$ car

$$\langle t^{i-j}G(\eta)\iota^-_{\mathrm{dR},\check\pi}\otimes\zeta_{\rm dR},t^{j-k-1}G(\eta^{-1})\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}\rangle=t^{i-k-1}G(\eta)G(\eta^{-1})$$

n'est pas 0 dans $\mathbf{B}^-_{\rm dR}$ puisque $i\le k$. □

13.3.3. Interprétation en termes de modèles de Kirillov. — Le th. 13.7 se traduit de manière agréable en termes des modèles de Kirillov.

Remarque 13.9. — Soient 1_T l'unité de T et $1^{]\infty[}$ l'élément neutre de $\mathbf{A}^{]\infty[,*}$.

(i) Si $v\in\rho_T\otimes\Pi(\rho_T^\diamond)$, on a

$$\iota_q(v)=\sum_{n>0,\,v_p(n)=0}\mathscr{K}^T_{\rm Aut}\big(\big(\begin{smallmatrix}n&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\star v\big)(1_T,1^{]\infty[})\,\tilde q^n$$

(ii) Si $v\in H^1_{\rm ét}(\widehat X^{(p)}(0),\mathbf{Z}_p)$, on a

$$\iota_{\widetilde{\mathbf{A}}}\circ\mathrm{Res}(v)=\sum_{n>0,\,v_p(n)=0}\mathscr{K}^{\mathbb{T}}_H\big(\big(\begin{smallmatrix}n&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\star v\big)(1_T,1^{]\infty[})\,\tilde q^n$$

On déduit de cette remarque et du th. 13.7 le résultat suivant.

Corollaire 13.10. — *Si π est cohomologique de poids $(k+2,j+1)$, alors*

$$\mathscr{K}^{\mathbb{T}}_H\circ\iota_\pi=(-1)^{k-j}\mathscr{K}^T_{\rm Aut}\circ\iota^-_{\rm dR}$$

Démonstration. — Si on applique les deux membres à $v \in m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \pi^{\text{alg}}$, on obtient des fonctions sur $T \times \mathbf{A}^{]\infty[,*}$ (le membre de gauche est une fonction sur $\mathbb{T} \times \mathbf{A}^{]\infty[,*}$ mais se factorise à travers $T \times \mathbf{A}^{]\infty[,*}$ sur l'image de ι_π). Le lien entre q-développement et modèle de Kirillov, combiné avec le th. 13.7, montre que ces fonctions coïncident sur $\{1_T\} \times \mathbf{A}^{]\infty[,*}$. On conclut en remarquant que T agit par le même caractère (celui permettant d'écrire $m_{\text{ét}}(\pi)$ comme une spécialisation de ρ_T) sur les images de ι_π et ι_{dR}^-. □

13.4. Une version explicite de la factorisation d'Emerton

13.4.1. Le cas générique. — On dit que $\mathfrak{m}$ *est générique* (resp. *très générique*) si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, et si la restriction de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas de la forme $\chi \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (resp. pas de la forme $\chi \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$).

Théorème 13.11. — (i) *Si* $\mathfrak{m}$ *est générique, il existe un unique isomorphisme*

$$\iota_T : \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond) \xrightarrow{\sim} H^1[\rho_T]$$

de $T[G_{\mathbf{Q}} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$*-modules, tel que* $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}} \circ \iota_T = \mathscr{K}_{\text{Aut}}^{\mathbb{G}}$.

(ii) *Pour tout* $x \in \mathscr{X}^{\text{cl}}$, *avec* $\rho_x = m_{\text{ét}}(\pi)$ *et* π *de poids* $(k+2, j+1)$, *on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} (H^1[\rho_T])[\frac{1}{p}] & \rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond)[\frac{1}{p}] \arrow[l, "\iota_T"'] \\ m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \pi^{\text{alg}} \arrow[u, "(-1)^{k-j}\iota_\pi"] \arrow[r, "\iota_{\text{dR}}^-"] & m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi(m_{\text{ét}}^*(\pi)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Démonstration. — D'après le th. 10.1 et la prop. 3.36, $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ et $\mathscr{K}_{\text{Aut}}^{\mathbb{G}}$ induisent des isométries sur leurs images respectives ; en particulier, ces images sont fermées puisque les espaces de départ sont complets.

Par ailleurs, il résulte du cor. 13.10 que, si $0 \leq j \leq k$, les images des vecteurs localement algébriques de poids $(k+2, j+1)$ de $H^1[\rho_T]$ et $\rho_T \otimes_T \Pi(\rho_T^\diamond)$ par $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ et $\mathscr{K}_{\text{Aut}}^{\mathbb{G}}$ sont les mêmes. Comme ces vecteurs sont denses dans les deux espaces (pour $H^1[\rho_T]$ c'est déjà le cas en se restreignant à $j = k = 0$ ou aux vecteurs $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-algébriques, cf. prop. 4.20, et pour $\Pi(\rho_T^\diamond)$, cela résulte du th. 3.5 et de la zariski-densité des points classiques), et comme les images de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ et $\mathscr{K}_{\text{Aut}}^{\mathbb{G}}$ sont fermées, on en déduit que ces images sont les mêmes.

On peut (et doit) donc définir ι_T comme étant $(\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}})^{-1} \circ \mathscr{K}_{\text{Aut}}^{\mathbb{G}}$, où $(\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}})^{-1}$ est l'inverse de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ sur l'image de $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$. Ceci prouve le (i).

Le (ii) est une réécriture du cor. 13.10 (en utilisant le fait que $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ et $\mathscr{K}_{\text{Aut}}^{\mathbb{G}}$ sont obtenus en rendant $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times G_{\mathbf{Q}}$-invariants $\mathscr{K}_H^{\mathbb{T}}$ et $\mathscr{K}_{\text{Aut}}^{T}$). □

Remarque 13.12. — Le th. 13.11, couplé avec la construction de $\Pi(\rho_T^\diamond)$ fournit une factorisation de la cohomologie complétée. Qu'une telle factorisation puisse exister est une intuition d'Emerton [**27**]. Les différences entre les résultats d'Emerton et les notres sont les suivants :

• L'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ diffère de $g\mapsto {}^tg^{-1}$, ce qui fait que nous obtenons $\rho_T\otimes\Pi(\rho_T^\diamond)$ au lieu de $\rho_T\otimes\Pi(\rho_T)$.

• Emerton obtient un isomorphisme unique à isomorphisme près de chacun des deux membres alors que le notre est uniquement déterminé (une des raisons qui rendent cette unicité possible est notre choix d'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$).

• Les objets qui apparaissent dans notre factorisation de $\Pi(\rho_T^\diamond)$ sont les duaux de ceux d'Emerton (par exemple, son $\Pi_p(\rho_T^\diamond)$ est sans T-torsion alors que la T-torsion est dense dans la notre). Que l'on obtienne quand-même le même objet est dû au fait que, si A et B sont des T-modules libres, alors $(A\otimes_T B)^*$ peut se décrire comme étant $A^\diamond\otimes_T B^*$ ou $A^*\otimes_T B^\diamond$.

• Le th. 13.11 est un peu plus général que celui d'Emerton : nous n'avons besoin que de ce que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ soit générique, alors qu'il a besoin qu'elle soit très générique.

13.4.2. Le cas non-eisenstein. — Si on suppose seulement que $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, on a un résultat un peu plus faible (i.e. on est forcé d'inverser p).

Théorème 13.13. — (i) *Si $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein, il existe un unique isomorphisme*

$$\iota_T:\rho_T\otimes_T\Pi(\rho_T^\diamond)[\tfrac{1}{p}]\xrightarrow{\sim}(H^1[\rho_T])[\tfrac{1}{p}]$$

de $T[G_{\mathbf{Q}}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-modules, tel que $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}\circ\iota_T=\mathscr{K}_{\rm Aut}^{\mathbb{G}}$.

(ii) *Pour tout $x\in\mathscr{X}^{\rm cl}$, avec $\rho_x=m_{\rm \acute{e}t}(\pi)$ et π de poids $(k+2,j+1)$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
(H^1[\rho_T])[\tfrac{1}{p}] & \rho_T\otimes_T\Pi(\rho_T^\diamond)[\tfrac{1}{p}] \arrow[l, "\iota_T"'] \\
m_{\rm \acute{e}t}(\pi)\otimes\pi^{\rm alg} \arrow[u, "(-1)^{k-j}\iota_\pi"] \arrow[r, "\iota_{\rm dR}^-"] & m_{\rm \acute{e}t}(\pi)\otimes\Pi(m_{\rm \acute{e}t}^*(\pi)) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Comme $\Pi(\rho_T^\diamond)[\frac{1}{p}]$ est une limite inductive de représentations admissibles de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, la prop. 13.14 ci-dessous implique que l'image de $\mathscr{K}_{\rm Aut}^{\mathbb{G}}$ est fermée. Par ailleurs, $\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$ induit une isométrie sur son image qui est donc, elle aussi, fermée. On en déduit, comme dans la preuve du th. 13.11, en utilisant la densité des vecteurs algébriques et le cor. 13.10, que ces images sont les mêmes. On peut donc définir $\lambda_T:(H^1[\rho_T])[\frac{1}{p}]\to\rho_T\otimes_T\Pi(\rho_T^\diamond)[\frac{1}{p}]$ en posant $\lambda_T=(\mathscr{K}_{\rm Aut}^{\mathbb{G}})^{-1}\circ\mathscr{K}_H^{\mathbb{G}}$. Alors λ_T est surjective par construction, et pour prouver le (i), il s'agit de prouver que λ_T est injective (auquel cas, on peut poser $\iota_T=\lambda_T^{-1}$).

Il résulte du th. 11.9 que le noyau de λ_T est supporté sur le lieu des $\mathfrak{p}$ tels que l'opérateur de Sen de $\rho_{\mathfrak{p}}$ soit scalaire (la condition $\rho_{\mathfrak{p}}$ irréductible est assurée par l'hypothèse que $\mathfrak{m}$ est non-eisenstein). Or il résulte des résultats de Pan [**51**, th. 6.2.2] que ce lieu est de codimension ≥ 2 (c'est l'ensemble des twists de représentations associées à des formes modulaires de poids 1, non ramifiées en dehors de S).

Maintenant, on a une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} \lambda_T \to (H^1[\rho_T])[\tfrac{1}{p}] \to \rho_T \otimes \Pi(\rho_T^\diamond))[\tfrac{1}{p}] \to 0$$

grâce à la surjectivité de λ_T. On peut dualiser cette suite exacte, et écrire $(H^1[\rho_T]^*)[\frac{1}{p}]$ comme une extension d'un $T[\frac{1}{p}]$-module de torsion $M_{\rm Sen}$, dont le support (lieu où l'opérateur de Sen est scalaire) est de codimension ≥ 2, par un $T[\frac{1}{p}]$-module limite inductive de modules de la forme [28] $T^{\mathbf{N}}[\frac{1}{p}]$ (quitte à remplacer T par une de ses composantes connexes). Grâce au théorème de l'image ouverte, on peut trouver un T-réseau de $((H^1[\rho_T])[\frac{1}{p}])^*$ extension par $T^{\mathbf{N}}$ d'un T-réseau $M_{\rm Sen}^+$ de $M_{\rm Sen}$. Comme le support est de codimension ≥ 2, une telle extension est scindée, et $M_{\rm Sen}$ s'identifie au sous-module de $T[\frac{1}{p}]$-torsion de $((H^1[\rho_T])[\frac{1}{p}])^*$; le scindage commute donc aux actions de $G_{\mathbf{Q}}$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

Il en résulte que la suite exacte ci-dessus est scindée, en tant que $T[G_{\mathbf{Q}}\times\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})]$-module topologique. Mais $\operatorname{Ker}\lambda_T$ ne contient pas de vecteurs localement algébriques non nuls (car les représentations de $G_{\mathbf{Q}}$ qui apparaissent dans le socle sont des représentations associées à des (twists) de formes modulaires de poids 1, et pas de poids $\geq$ 2), et comme les vecteurs localement algébriques sont denses dans $(H^1[\rho_T])[\frac{1}{p}]$, on en déduit que $\operatorname{Ker}\lambda_T = 0$, ce qui prouve le (i).

Le (ii) se prouve comme pour le th. 13.11. □

Proposition 13.14. — *Soient W_1, W_2 des L-banachs munis d'actions continues de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ et soit $f : W_1 \to W_2$, $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante, continue. Si W_1 est admissible, alors $f(W_1)$ est fermée dans W_2.*

Démonstration. — Quitte à quotienter W_1 par le noyau de f et remplacer W_2 par l'adhérence de l'image de f, on peut supposer que f et $f^* : W_2^* \to W_1^*$ sont injectives (et donc, par dualité, grâce au théorème de Hahn-Banach, sont d'images denses). Maintenant, comme W_1 est admissible, tout sous-$\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-espace X de W_1^* est fermé (l'intersection X_0 avec la boule unité $W_{1,0}^*$ de W_1^* est un $\mathscr{O}_L[[K]]$-module de type fini (K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$) car $W_{1,0}^*$ l'est par admissibilité de W_1 et $\mathscr{O}_L[[K]]$ est noethérienne ; il s'ensuit que X_0 est compact et donc X est complet et donc fermé). Donc f^* est surjective et est un isomorphisme de duaux de banachs par le théorème de l'image ouverte. Il s'ensuit que f est un isomorphisme de banachs, ce qui permet de conclure. □

Remarque 13.15. — Si x est classique avec $\rho_x = m_{\rm \acute{e}t}(\pi)$, et si la restriction de ρ_x à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas une somme de deux caractères, il résulte du (ii) du th. 13.13 (ou 13.11) que la restriction de ι_T à $\rho_x\otimes\Pi_S(\rho_x^*)$ est, au signe près, l'unique (rem. 14.14) extension

28. Si $\mathscr{X}$ contient un point p-pathologique, il faut remplacer $T^{\mathbf{N}}$ par un sous-objet dont le quotient est de type fini sur T et supporté sur le lieu p-pathologique. Comme ce lieu est disjoint du lieu où l'opérateur de Sen est scalaire, cela ne change rien à ce qui suit.

de l'application ι_π de la rem. 13.2. Si ρ_x est une somme de deux caractères, alors cette restriction fournit une extension privilégiée de ι_π.

PARTIE IV
FACTORISATION DU SYSTÈME DE BEILINSON-KATO

14. Symboles modulaires et élément de Kato

Ce chapitre est consacré à la preuve du th. 0.10 comparant l'élément de Kato et le symbole modulaire $(0,\infty)$ pour une forme modulaire de poids ≥ 2 (ou plus généralement, une représentation cohomologique de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$). La preuve (th. 14.18) n'est complète que dans le cas où la représentation galoisienne associée a une restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui est irréductible. Le cas général s'en déduit par prolongement analytique, cf. n° 15.7.2.

14.1. $(0,\infty)$ dans le dual de la cohomologie complétée

On peut associer au *symbole modulaire* (a,b) une forme linéaire continue sur $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{Q}_p))$, encore notée (a,b) : si $\gamma\mapsto\phi_\gamma$ est un 1-cocycle sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{Q}_p)$ et identiquement nul sur $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$, on pose

$$\langle (a,b),\phi\rangle = (\phi_{\alpha_b}-\phi_{\alpha_a})(1),\quad \text{où } \alpha_a,\alpha_b\in\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \text{ vérifient } \alpha_a(\infty)=a,\ \alpha_b(\infty)=b,$$

où $1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{G}(\mathbf{A})$. C'est donc la composée du symbole modulaire (a,b) du (ii) de la rem. 4.3 avec la masse de Dirac en 1. En particulier,

$$\langle (0,\infty),(\gamma\mapsto\phi_\gamma)\rangle = -\phi_S(1),\quad \text{où } S=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right).$$

Remarque 14.1. — (invariance par extension des scalaires)

Si v est une place de $\mathbf{Q}$, et si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_v$, alors $(0,\infty)$ sur $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))$ est obtenu par L-linéarité à partir de $(0,\infty)$ sur $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{Q}))$. En particulier, la restriction de $(0,\infty)$ sur $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))$ à $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{Q}))$ ne dépend pas de L, ce qui permet d'interpréter p-adiquement des calculs sur $\mathbf{C}$.

Remarque 14.2. — (invariance par multiplication par un caractère)

Soit $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ un espace de fonctions sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, stable par translations à gauche par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et à droite par $\mathbb{G}(\mathbf{A})$. Si η est un caractère continu de $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$ (à valeurs dans $\mathbf{C}^*$ ou L^* suivant la situation), et si la multiplication par $\eta\circ\det$ stabilise $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$, elle commute à l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et donc elle induit un isomorphisme de $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$. Comme $\eta\circ\det(1)=1$, on voit que

$$\langle (0,\infty),(\gamma\mapsto(\eta\circ\det)\phi_\gamma)\rangle = \langle (0,\infty),(\gamma\mapsto\phi_\gamma)\rangle,$$

i.e. $(0,\infty)$ *est invariante par multiplication par un caractère de* $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$.

Lemme 14.3. — *Si* $a,b\in\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ *et si* $\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})_+$, *alors*

$$\gamma^{]\infty[}\star(a,b)=(\gamma\cdot a,\gamma\cdot b).$$

En particulier,

$$\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star(0,\infty)=-(0,\infty)\quad\text{et}\quad\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star(0,\infty)=(0,\infty),\ \textit{si } a\in\mathbf{Q}_+^*.$$

Démonstration. — Soit $\gamma\mapsto\phi_\gamma$ un 1-cocycle sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, nul sur $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$, à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbb{G}(A),L)$, et soit ϕ la classe de cohomologie à support compact correspondante. On en déduit :

$$\begin{aligned}\langle\gamma^{]\infty[}\star(a,b),\phi\rangle&=(\phi_{\alpha_b}-\phi_{\alpha_a})(1,(\gamma^{]\infty[})^{-1})=(\phi_{\alpha_b}-\phi_{\alpha_a})(\gamma_\infty^{-1},(\gamma^{]\infty[})^{-1})\\&=\big(\gamma*(\phi_{\alpha_b}-\phi_{\alpha_a})\big)(1)=\langle(\gamma(a),\gamma(b)),\phi\rangle\end{aligned}$$

(La première égalité vient de la formule $\langle g\star\mu,\phi\rangle=\langle\mu,g^{-1}\star\phi\rangle$, de la définition de l'action $\star$ et de la formule pour $\langle(a,b),-\rangle$, la seconde vient de ce que $\gamma_\infty^{-1}\in\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$, la troisième résulte de la définition de l'action $*$ et la dernière de l'identité $\gamma*(\phi_{\alpha_b}-\phi_{\alpha_a})=\phi_{\alpha_{\gamma\cdot b}}-\phi_{\alpha_{\gamma\cdot a}}$ qui est une conséquence du lemme 4.2.) □

Corollaire 14.4. — *Si* $\phi\in H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))$ *et si* $\ell\in\mathscr{P}$, *alors*

$$\big\langle\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\ell\star(0,\infty),\phi\big\rangle=\big\langle(0,\infty),\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\ell,\infty[}\star\phi\big\rangle,$$

En particulier, si $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty,p[}\star\phi=\lambda\,\phi$, *avec* $\lambda\in L$, *alors*

$$\big\langle\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_p\star(0,\infty),\phi\big\rangle=\lambda\,\langle(0,\infty),\phi\big\rangle,$$

et si $\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty,p[}\star\phi^{]p[}=\lambda\,\phi^{]p[}$, *alors*

$$\big\langle\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\ell\star(0,\infty),\phi^{]p[}\otimes\phi_p\big\rangle=\lambda\,\langle\left(\begin{smallmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_p\star(0,\infty),\phi^{]p[}\otimes\phi_p\big\rangle.$$

Démonstration. — La première formule résulte de ce que $\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\ell,\infty[}\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\ell=\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}$, de ce que $\big\langle\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\ell,\infty[}\star\mu,\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\ell,\infty[}\star\phi\big\rangle=\langle\mu,\phi\rangle$, et du lemme 14.3. La seconde en est une conséquence immédiate, et la troisième est une conséquence de la formule suivante qui est aussi une conséquence immédiate de la première :

$$\big\langle\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\ell\star(0,\infty),\phi^{]p[}\otimes\phi_p\big\rangle=\lambda\,\langle(0,\infty),\phi^{]p[}\otimes\big(\left(\begin{smallmatrix}\ell&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_p\star\phi_p\big)\big\rangle.$$ □

14.2. $(0,\infty)$ et valeurs spéciales de fonctions L

14.2.1. $(0,\infty)$ *et application d'Eichler-Shimura*. — Soit

$$\phi\in H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{A}^+_{\rm par}d\tau\otimes W_{k,j})$$

On peut donc écrire ϕ sous la forme

$$\phi(\tau,g^{]\infty[})=\Big(\sum_{\ell=0}^{k}\phi_\ell(\tau,g^{]\infty[})\tfrac{e_1^\ell e_2^{k-\ell}}{(e_1\wedge e_2)^j}\Big)\,d\tau,$$

où $\tau\mapsto\phi_\ell(\tau,g^{]\infty[})$ est holomorphe, à décroissance rapide, sur $\mathscr{H}$. Si $\check v\in W_{k,j}^*$, l'application d'Eichler-Shimura fournit

$$\iota_{\rm ES}(\phi\otimes\check v)=\langle\check v,\iota_{\rm ES}(\phi)\rangle\in H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),{\rm LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{C})).$$

On fait agir $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty$ par $\big(\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty,1\big)\in\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{G}(\mathbf{C})$ sur $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),{\rm LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathbf{C}))$ et pas par $\big(\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty,\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)$ pour que le résultat soit compatible avec l'action en p-adique (sur $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))$).

Proposition 14.5. — *On a* [29]

$$\begin{aligned}\langle(0,\infty),\iota_{\rm ES}(\phi\otimes\check v)\rangle&=\int_0^{+\infty}\langle\check v,\phi(iy,1^{]\infty[})\rangle\\ \langle(0,\infty),\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty\star\iota_{\rm ES}(\phi\otimes\check v)\rangle&=\int_0^{+\infty}\big\langle\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)*\check v,\phi(iy,\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[})\big\rangle\end{aligned}$$

Démonstration. — On note $\tau\mapsto\phi^{(-1)}(\tau,g^{]\infty[})$ la primitive de $\tau\mapsto\phi(\tau,g^{]\infty[})$ s'annulant en $\pm i\infty$. L'invariance de ϕ par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ se traduit par l'existence de constantes $c_\gamma^\pm(\phi,g^{]\infty[})$ telles que l'on ait $\gamma*\phi^{(-1)}=\phi^{(-1)}+c_\gamma^\pm(\phi,g^{]\infty[})$ sur $\mathscr{H}^\pm$. En faisant tendre τ vers $\gamma\cdot\pm i\infty$, on obtient $\phi^{(-1)}(\gamma\cdot\pm i\infty,g^{]\infty[})+c_\gamma^{\pm{\rm sign}(\gamma)}(\phi,g^{]\infty[})=0$, où ${\rm sign}(\gamma)={\rm sign}(\det\gamma)$, et donc

$$c_\gamma^\pm(\phi,g^{]\infty[})=\int_{\gamma\cdot\pm i\infty}^{\pm{\rm sign}(\gamma)i\infty}\phi(\tau).$$

Ceci fournit une fonction $c_\gamma(\phi)\in{\rm LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\otimes W_{k,j}$ (avec $c_\gamma(\phi)(g_\infty,g^{]\infty[})=c_\gamma^\pm(\phi,g^{]\infty[})$, si ${\rm sign}(g_\infty)=\pm$), et $\gamma\mapsto c_\gamma(\phi)$ est un 1-cocycle sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ dont la classe dans $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),{\rm LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\otimes W_{k,j})$ est $\iota_{\rm ES}(\phi)$, et qui est identiquement nul sur $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ (puisqu'on intègre de $\pm i\infty$ à $\pm i\infty$). Autrement dit, on a construit l'élément de $Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathbb{B}(\mathbf{Q}),M)$, avec $M={\rm LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\otimes W_{k,j}$, représentant $\iota_{\rm ES}(\phi)$. Le résultat s'en déduit en revenant à la définition de $(0,\infty)$: il faut évaluer $-\langle\check v,c_S(\phi)\rangle$ en $g=1$.

Pour prouver la seconde formule, on utilise les formules

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty\star(\psi\otimes\check v)&=\big(\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty\star\psi\big)\otimes\check v\\ \left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty\star\iota_{\rm ES}(\phi)&=\iota_{\rm ES}\big(\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty\star\phi\big)\\ \langle\check v,\phi(\overline\tau,1^{]\infty[})\rangle&=\big\langle\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)*\check v,\phi\big(-\overline\tau,\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\big)\big\rangle\end{aligned}$$

la première formule venant du choix fait pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\infty$, la dernière formule venant de ce que $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)*\phi=\phi$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur e_1,e_2 étant transférée sur $\check v$. $\square$

29. Avec $\phi(iy,g^{]\infty[})=\big(\sum_{\ell=0}^k\phi_\ell(iy,g^{]\infty[})\frac{e_1^\ell e_2^{k-\ell}}{(e_1\wedge e_2)^j}\big)\,i\,dy$.

14.2.2. Lien avec les valeurs spéciales de fonctions L. — Si

$$\phi=\sum_{\ell=0}^{k}\phi_\ell\otimes\tfrac{(e_2^*)^{k-\ell}(e_1^*)^\ell}{(k-\ell)!\,(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\in M_{k+2,j+1}(\mathbf{C})\otimes W_{k,j}^*,$$

on pose $\mathrm{LC}=\mathrm{LC}(\mathbf{A}^{]\infty[,*},\mathbf{C})$, et

$$\mathscr{K}(\phi,u,X)=\sum_{\ell=0}^{k}\mathscr{K}(\phi_\ell,u)X^{\ell-j}\in\frac{\mathrm{LC}[X,X^{-1}]}{X^{k+1-j}\mathrm{LC}[X]}$$

$$L(\phi,s)=L(\mathscr{K}(\phi),s)=\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}\mathscr{K}(\phi,n^{]\infty[},2i\pi n)\,n^{-s}=\sum_{\ell=0}^{k}(2i\pi)^{\ell-j}L(\phi_\ell,s+j-\ell)$$

où $L(\phi_\ell,s)=\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}\mathscr{K}(\phi_\ell,n^{]\infty[})\,n^{-s}$. Les actions de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ sur $M_{k+2,j+1}(\mathbf{C})$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{C})$ sur $W_{k,j}^*$ deviennent, en restriction au mirabolique :

$$\mathscr{K}(\left(\begin{smallmatrix}a_\infty & b_\infty\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\phi,u,X)=e^{b_\infty X}\,\mathscr{K}(\phi,u,a_\infty X)$$
$$\mathscr{K}(\left(\begin{smallmatrix}a^{]\infty[} & b^{]\infty[}\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\phi,u,X)=\mathbf{e}^{]\infty[}(b^{]\infty[}u)\,\mathscr{K}(\phi,a^{]\infty[}u,X)$$

Si $\mathscr{K}\in\frac{\mathrm{LC}[X,X^{-1}]}{X^{k+1-j}\mathrm{LC}[X]}$, on définit $\mathscr{K}\circ(-1)$ par la formule

$$(\mathscr{K}\circ(-1))(u,X)=\mathscr{K}(-u,-X).$$

Proposition 14.6. — *Si $\phi\in M_{k+2,j+1}(\mathbf{C})\otimes W_{k,j}^*$,*

$$\langle(0,\infty),\iota_{\mathrm{ES}}(\phi)\rangle=\tfrac{1}{(-2i\pi)^{k-j+1}}L(\mathscr{K}(\phi),0)$$
$$\langle(0,\infty),\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_\infty\star\iota_{\mathrm{ES}}(\phi)\rangle=\tfrac{1}{(-2i\pi)^{k-j+1}}L(\mathscr{K}(\phi)\circ(-1),0)$$

Démonstration. — Écrivons

$$\phi=\sum_{\ell=0}^{k}\phi_\ell\otimes\tfrac{(e_2^*)^{k-\ell}(e_1^*)^\ell}{(k-\ell)!\,(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\quad\text{avec }\phi_\ell=\phi_{\ell,0}\otimes\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\tau.$$

Comme $\big\langle\frac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j},\frac{(e_2^*)^{k-\ell}(e_1^*)^\ell}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\big\rangle=(-1)^\ell\tau^{k-\ell}$, la prop. 14.5 fournit la formule

$$\langle(0,\infty),\iota_{\mathrm{ES}}(\phi)\rangle=\int_0^\infty\sum_{\ell=0}^{k}\tfrac{(-1)^\ell}{(k-\ell)!}\phi_{\ell,0}(iy,1^{]\infty[})(iy)^{k-\ell}\,i\,dy,$$

ce qui est la valeur en $s=1$ de

$$\sum_{\ell=0}^{k}\tfrac{i^{k+\ell+1}}{(k-\ell)!}\int_0^\infty\phi_{\ell,0}(iy,1^{]\infty[})y^{s+k-\ell}\,\tfrac{dy}{y}.$$

Maintenant [30], $\phi_{\ell,0}(iy,1^{]\infty[})=\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}n^{k+1-j}\mathscr{K}(\phi_\ell,n^{]\infty[})e^{-2\pi ny}$, et donc

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \phi_{\ell,0}(iy,1^{]\infty[})y^{s+k-\ell}\,\tfrac{dy}{y} &= \tfrac{\Gamma(s+k-\ell)}{(2\pi)^{s+k-\ell}}\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}n^{1+\ell-j-s}\mathscr{K}(\phi_\ell,n^{]\infty[})\\ &= \tfrac{\Gamma(s+k-\ell)}{(2\pi)^{s+k-j}}(2\pi)^{\ell-j}L(\phi_\ell,s+j-\ell-1)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle(0,\infty),\iota_{\mathrm{ES}}(\phi)\rangle &= \sum_{\ell=0}^k \tfrac{i^{k+\ell+1}}{(k-\ell)!}\tfrac{\Gamma(1+k-\ell)}{(2\pi)^{1+k-j}}(2\pi)^{\ell-j}L(\phi_\ell,j-\ell)\\ &= \tfrac{1}{(-2i\pi)^{1+k-j}}\sum_{\ell=0}^k(2i\pi)^{\ell-j}L(\phi_\ell,j-\ell)\\ &= \tfrac{1}{(-2i\pi)^{1+k-j}}L(\phi,0)\end{aligned}$$

Cela prouve la première formule. La seconde s'en déduit en utilisant la seconde formule de la prop. 14.5 et le fait que $\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)*\frac{(e_2^*)^{k-\ell}(e_1^*)^\ell}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}=(-1)^{\ell-j}\frac{(e_2^*)^{k-\ell}(e_1^*)^\ell}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}$. □

Corollaire 14.7. — *Si*

$$\mathscr{K}^\pm(\phi)=\tfrac12\big(\mathscr{K}(\phi)\pm(\mathscr{K}(\phi)\circ(-1))\big),$$

alors

$$\langle(0,\infty),\iota_{\mathrm{ES}}^\pm(\phi)\rangle=\tfrac{1}{(-2i\pi)^{k-j+1}}L(\mathscr{K}^\pm(\phi),0).$$

Remarque 14.8. — Posons $f_\ell=\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}n^{k+1-j}\mathscr{K}(\phi_\ell,n^{]\infty[})e^{2i\pi n\tau}$. Alors f_ℓ est une forme modulaire classique, et on a $L(\phi_\ell,s)=L(f_\ell,s+k+1-j)$. Il s'ensuit que

$$L(\phi,0)=\sum_{\ell=0}^k(2i\pi)^{\ell-j}L(f_\ell,k+1-\ell),$$

ce qui exprime $L(\phi,0)$ comme une somme de valeurs critiques de fonctions L de formes modulaires classiques.

14.3. L'élément de Kato

14.3.1. Tétrapilectomie. — Soit V une L-représentation de Rham de $G_{\mathbf{Q}_p}$. Si $i\in\mathbf{Z}$, on note $V\otimes\varepsilon_p^i$ l'espace V muni de l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ multipliée par ε_p^i. La représentation

$$V(i):=V\otimes\mathbf{Q}_p(i)=V\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^i$$

est isomorphe à $V\otimes\varepsilon_p^i$, mais nous n'identifierons pas ces deux représentations : en particulier,

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{dR}}(V\otimes\varepsilon_p^i)&=t^{-i}D_{\mathrm{dR}}(V)\subset\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V\\ D_{\mathrm{dR}}(V(i))&=D_{\mathrm{dR}}(V)\otimes t^{-i}\zeta_{\mathrm{B}}^i=D_{\mathrm{dR}}(V)\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}^i\end{aligned}$$

30. Le $k+1-j$ est en fait $(k+2)-(j+1)$.

Si $\mu \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V)$, alors $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \mu \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, V \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_p^i)$ et donc $\exp^*(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \mu) \in t^{-i} D_{\mathrm{dR}}(V)$ (plus précisément, $t^{-i}\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)$).

Utiliser le lemme 16.9 avec $G' = X' = \{1\}$, $G_p = \mathbf{Z}_p^*$, $H_1 = G_{\mathbf{Q}_p}$, $H_2 = \mathbf{Z}_p^*$, $\iota_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_p$, $\iota_2 = \mathrm{id}$, $W = \mathbf{Q}_p(i)$, fournit un isomorphisme Λ-équivariant

$$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V) \otimes \mathbf{Q}_p(i) \xrightarrow[\mu \mapsto \mu \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^i]{\sim} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes V \otimes \mathbf{Q}_p(i))$$

et on a, si $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*, L(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}))^{\mathbf{Z}_p^*}$ et $\ell \in \mathbf{Z}$,

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x) x^\ell \, \mu \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^i = \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{i+\ell} \phi(x) \mu \Big) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^i \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, V(i) \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_p^\ell).$$

(Si $\sigma \mapsto \mu_\sigma$ est un 1-cocycle représentant μ, alors $\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{i+\ell} \phi(x) \mu \big) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^i$ est représenté par le 1-cocycle $\sigma \mapsto \big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{i+\ell} \phi(x) \mu_\sigma \big) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^i$.) On a

$$\exp^* \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x) x^\ell \, \mu \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^i \Big) \in t^{-\ell} D_{\mathrm{dR}}(V) \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}^i.$$

14.3.2. Les éléments $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)$ *et* $\mathbf{z}(\pi)$. — Soit $f \in M_{k+2,j+1}^{\mathrm{par,\,cl}}(\Gamma_0(N), \chi)$ primitive, et soit $\pi = \pi_{f,j+1}$ (cf. § 7.1).

Si $j = 0$, on a $m_{\text{ét}}(\pi) = \rho_{f_\pi^*}$. Dans ce cas, on a le résultat fondamental suivant de Kato, où l'on a posé $m(f_\pi) := m(\pi)$ et $\iota_{\mathrm{dR},f_\pi}^+ := \iota_{\mathrm{dR},\pi}^+$ (cf. § 7.2, en particulier n$^{\mathrm{os}}$ 7.2.7 et 7.2.9, ainsi que n$^{\mathrm{o}}$ 2.2.2 pour Λ et $\exp^*$).

Théorème 14.9. — (Kato [**42**, th. 12.5]) *Il existe un unique*

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(f_\pi^*) \in m(f_\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes \rho_{f_\pi^*})$$

qui vérifie

$$\exp^* \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)(tx)^{k+2-r} \langle \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(f_\pi^*), \gamma \rangle \Big) = \big((2i\pi)^{k-r+1} \Omega_\pi^\pm(\gamma) L(f_\pi \otimes \phi, r) \big) \iota_{\mathrm{dR},f_\pi}^+,$$

si $1 \leq r \leq k+1$, *si* $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*, \mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}))^{\mathbf{Z}_p^*}$ *vérifie* $\phi(-x) = \pm(-1)^{k-r-1}\phi(x)$ *et si* $\gamma = \gamma^+ + \gamma^- \in m(f_\pi)$, *avec* $\gamma^\pm = \Omega_\pi^\pm(\gamma) \iota_{\mathrm{ES}}^\pm \circ \iota_{\mathrm{dR},f_\pi}^+$.

Remarque 14.10. — Le membre de gauche vit dans le monde p-adique ; celui de droite dans le monde archimédien, mais en fait $(2i\pi)^{k-r+1}\Omega_\pi^\pm(\gamma) L(f_\pi \otimes \phi, r) \in \mathbf{Q}(\pi)$.

Dans le cas j général, on a

$$m_{\mathrm{B}}(\pi)^* = m_{\mathrm{B}}(f_\pi)^* \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-j} \quad \text{et} \quad H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi)) = H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes \rho_{f_\pi^*}) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^j,$$

d'où un isomorphisme naturel

$$m(f_\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes \rho_{f_\pi^*}) \cong m_{\mathrm{B}}(\pi)^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi)).$$

On note

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi) \in m_{\mathrm{B}}(\pi)^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi)) \tag{14.11}$$
$$\mathbf{z}(\pi) \in m_{\mathrm{B}}(\pi)^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S}, m_{\text{ét}}(\pi))$$

les images de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(f_\pi^*)$ par cet isomorphisme et par $\Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi) \to m_{\text{ét}}(\pi)$.

Proposition 14.12. — *Si $1 - j \leq r \leq k + 1 - j$, si $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*, \mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}))^{\mathbf{Z}_p^*}$ vérifie $\phi(-x) = \pm(-1)^{r+1}\phi(x)$, et si $\gamma \in m(\pi)$, alors*

$$\begin{aligned}\exp^*\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)(tx)^r \langle \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi), \gamma\rangle\Big) &= \big((2i\pi)^{r-1}\Omega_\pi^\pm(\gamma) L(f_\pi \otimes \phi, k+2-j-r)\big)\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+ \\ &= \big((2i\pi)^{r-1}\Omega_\pi^\pm(\gamma) L(v_\pi^{]p[} \otimes \phi, 1-r)\big)\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+\end{aligned}$$

Démonstration. — L'équivalence des deux égalités résulte de la relation

$$L(f_\pi \otimes \phi, k+2-j-r) = L(v_\pi^{]p[} \otimes \phi, 1-r).$$

Par définition, on a

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)(tx)^r \langle \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi), \gamma\rangle = t^r \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x) x^{r+j} \langle \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(f_\pi^*), \gamma \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-j}\rangle\Big) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^j.$$

D'après le th. 14.9 (utilisé pour $k+2-j-r$ au lieu de r), l'image du membre de droite par $\exp^*$ est

$$t^r t^{-r-j}(2i\pi)^{r+j-1}\Omega_{\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^j}^{\pm(-1)^j}(\gamma \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-j}) L(f_\pi \otimes \phi, k+2-j-r) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^j \iota_{\mathrm{dR},f_\pi}^+,$$

et on conclut en utilisant les relations (lemme 7.7 pour la dernière)

$$t^{-j}\zeta_{\mathrm{B}}^j = \zeta_{\mathrm{dR}}^j, \quad \zeta_{\mathrm{dR}}^j \iota_{\mathrm{dR},f_\pi}^+ = \iota_{\mathrm{dR},\pi}^+, \quad \Omega_{\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^j}^{\pm}(\gamma \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-j}) = (2i\pi)^{-j}\Omega_\pi^{\pm(-1)^j}(\gamma).$$

□

Remarque 14.13. — D'après Kato [**42**], la restriction induit une injection [(31)] :

$$\mathrm{loc}_p : m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi)) \hookrightarrow m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi)).$$

Maintenant, il y a deux possibilités pour la restriction $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ (après extension éventuelle à une extension quadratique de L) : elle est soit irréductible, soit on a une suite exacte (qui peut être scindée mais, conjecturalement, cela n'arrive que dans le cas de multiplication complexe) $0 \to L(\delta_1) \to m_{\text{ét}}(\pi)_p \to L(\delta_2) \to 0$ où $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ sont des caractères localement algébriques de poids respectifs $j+1$ et $j-k$.

31. Voir le th. 15.18 ci-après pour les résultats de Kato, l'injectivité ci-dessous s'en déduit comme dans la prop. 15.20.

• Dans le premier cas, les conditions de la prop. 14.12 sur les $\exp^*$ déterminent complètement l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)$ dans $m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi))$ (c'est déjà le cas, d'après [**3**], si on fixe r) ; cela prouve directement l'unicité de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)$.

• Dans le second cas, les conditions sur les $\exp^*$ ne déterminent l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)$ dans $m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi))$, qu'à addition près d'un élément de $m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes L(\delta_1))$ et, pour prouver l'unicité de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)$, il faut utiliser le fait que $L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^1(G_{\mathbf{Q}}, \Lambda \otimes m_{\text{ét}}(\pi))$ est, toujours d'après Kato, de rang 1 sur $\Lambda[\frac{1}{p}]$ (et alors, comme ci-dessus, fixer r garantit déjà l'unicité).

14.3.3. L'élément $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)$. — Soit $\pi_p^{\mathrm{alg}} = \pi_p \otimes W_{k,j}^*$; c'est une représentation localement algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ que l'on encadre par la recette du n° 7.2.4. Soit

$$\iota_{\pi,p} : m(\pi) \otimes v_\pi^{]p[} \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))^{\mathrm{alg}} \to H_c^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}_p(\pi)))$$

la composée de la flèche naturelle $\iota_\pi : m(\pi) \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} \pi^{\mathrm{alg}} \to H_c^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathbf{Q}_p(\pi)))$ et de l'isomorphisme

$$\iota_{\mathrm{dR}}^- : \pi_p^{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\sim} \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))^{\mathrm{alg}}, \quad v \mapsto v \otimes (\iota_{\mathrm{dR},\check{\pi}}^- \otimes \zeta_{\mathrm{dR}})$$

On dit que π *est* Π_p*-compatible* si $\iota_{\pi,p}$ s'étend à $m(\pi) \otimes v_\pi^{]p[} \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$.

Remarque 14.14. — (i) Si $m_{\text{ét}}^*(\pi)$ vérifie la conjecture de compatibilité local-global d'Emerton, alors π est Π_p-compatible.

(ii) Si $m_{\text{ét}}^*(\pi)_{|G_{\mathbf{Q}_p}}$ est absolument irréductible, alors π est Π_p-compatible d'après la prop. 12.5.

(iii) Si $m_{\text{ét}}^*(\pi)$ est résiduellement générique, alors π est Π_p-compatible d'après le (ii) du th. 13.11.

(iv) L'extension de $\iota_{\pi,p}$ n'est pas forcément unique :

• Si la restriction de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas somme de deux caractères, on a $\mathrm{End}(m_{\text{ét}}(\pi)) = L$ car $m_{\text{ét}}(\pi)$ a deux poids distincts et donc ne peut pas être une extension d'un caractère par lui-même. L'extension de $\iota_{\pi,p}$ est alors unique (cf. rem. 2.6).

• Si cette restriction est somme de deux caractères, $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ est somme de deux séries principales et les vecteurs localement algébriques sont inclus dans l'une des séries principales, d'où une indétermination au niveau de l'autre série principale.

On suppose que π *est* Π_p*-compatible.* Comme $(0,\infty)$ est fixe par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_p$ sur l'image de $\iota_{\pi,p}$ d'après le cor. 14.4s, il lui correspond, d'après la prop. 2.2,

$$\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi) \in m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes (m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}})),$$

ainsi que, par torsion,

$$\mathbf{z}_{(0,\infty)} \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-1} \in m(\pi)^* \otimes_{\mathbf{Q}(\pi)} H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes (m_{\text{ét}}(\pi))).$$

Proposition 14.15. — *Si* $1-j\leq r\leq k+1-j$, *si* $\phi_r\in\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*,\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}))^{\mathbf{Z}_p^*}$ *vérifie* $\phi_r(-x)=\pm(-1)^{r+1}\phi_r(x)$, *et si* $\gamma\in m(\pi)$, *alors*

$$\exp^*\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi_r(x)(tx)^r\,\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}\otimes\gamma\big)$$
$$=\big((2i\pi)^{r-1}\Omega_\pi^{\pm}(\gamma)L(v_\pi^{]p[}\otimes\phi_r,1-r)\big)\,\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+.$$

Démonstration. — On a

$$\exp^*\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi_r(x)(tx)^r\,\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}\otimes\gamma^{\pm}\big)$$
$$=\exp^*\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi_r(x)(tx)^{r-1}\,\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\gamma^{\pm}\big)\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}^{-1}$$

Par ailleurs, d'après la prop. 2.10,

$$\exp^*\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi(x,tx)\,\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\gamma^{\pm}\big)=\langle(0,\infty),\gamma^{\pm}\otimes(v_\pi^{]p[}\otimes\phi)\rangle\,\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}$$

pour tout $\phi\in\pi_p^{\mathrm{alg}}$, à support dans $\mathbf{Z}_p^*$ (vu comme polynôme en X à coefficients dans $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p^*)$: on pose $\phi(x,tx)=\sum_i\phi_i(x)(tx)^i$, si $\phi=\sum_i\phi_iX^i$). Or, d'après le cor. 14.7, on a (le $\frac{1}{(-2i\pi)^{k-j+1}}$ apparaissant dans ce corollaire est compensé par le $(-2i\pi)^{k+1-j}$ entrant dans la définition de $\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+$) :

$$\big\langle(0,\infty),\gamma^{\pm}\otimes(v_\pi^{]p[}\otimes\phi)\big\rangle=\Omega_\pi^{\pm}(\gamma)L(v_\pi^{]p[}\otimes\phi^{\pm},0),\tag{14.16}$$

où $\phi^{\pm}(x,tx)=\frac{1}{2}(\phi(x,tx)\pm\phi(-x,-tx))$. On peut appliquer ce qui précède à $\phi=\phi_rX^{r-1}$, pour laquelle la condition mise sur ϕ_r fait que $\phi=\phi^{\pm}$, et on obtient

$$\exp^*\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\phi_r(x)(tx)^{r-1}\,\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\gamma\big)\tag{14.17}$$
$$=(2i\pi)^{r-1}\Omega_\pi^{\pm}(\gamma)L(v_\pi^{]p[}\otimes\phi_r,1-r)\,\iota_{\mathrm{dR},\pi}^+\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}.$$

Ceci permet de conclure. □

14.3.4. Comparaison entre $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)$ *et* $(0,\infty)$. — Posons (cf. (14.11))

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))_p:=\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}\in m_{\text{ét}}(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes m_{\text{ét}}(\pi))$$
$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi)):=\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi)\in m_{\text{ét}}(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},\Lambda\otimes m_{\text{ét}}(\pi))$$
$$\mathbf{z}(m_{\text{ét}}(\pi)):=\mathbf{z}(\pi)\in m_{\text{ét}}(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},m_{\text{ét}}(\pi))$$

Théorème 14.18. — *On a l'identité suivante dans* $m(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes m_{\text{ét}}(\pi))$ *modulo* [32] $m(\pi)^*\otimes H^0(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})},m_{\text{ét}}(\pi))$:

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))_p=\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))).$$

32. Ce module est de rang ≤ 2 sur $\mathbf{Q}_p(\pi)$ et est nul sauf dans le cas où π est de poids $(2,j)$ et π_p est la steinberg (à torsion près par un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ trivial sur p).

En particulier, $\mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}$ *est dans l'image de* loc_p.

Démonstration. — Si la restriction $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est irréductible, cela résulte directement (cf. rem. 14.13) de la comparaison de la formule de la prop. 14.15 avec celle de la prop. 14.12, et $H^0(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}, m_{\text{ét}}(\pi))=0$.

Si $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ n'est pas irréductible, il faut procéder par « prolongement analytique », voir la rem. 14.19 ci-dessous. □

Remarque 14.19. — Dans le cas où $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ n'est pas irréductible, on a une suite exacte $0\to L(\delta_1)\to m_{\text{ét}}(\pi)_p\to L(\delta_2)\to 0$, avec δ_1 et δ_2 de poids $j+1$ et $j-k$ respectivement. La suite

$$0\to H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes L(\delta_1))\to H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes m_{\text{ét}}(\pi)_p)\to H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes L(\delta_2))$$

est exacte et

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))_p-\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi)))\in m_{\text{ét}}(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes L(\delta_1)).$$

De plus, s'il existe $z\in m_{\text{ét}}(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},\Lambda\otimes m_{\text{ét}}(\pi))$ et $\alpha\in\Lambda$, non diviseur de 0, tels que $\alpha\,\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))_p=\mathrm{loc}_p(z)$, alors $z=\alpha\,\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))$ puisqu'on est en rang 1, et donc $\alpha\cdot\big(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))_p-\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi)))\big)=0$, ce qui implique le th. 14.18 pour π.

Nous produirons un tel couple (z,α) par prolongement analytique (prop. 15.30).

14.4. Équation fonctionnelle de l'élément de Kato

Le th. 14.23 ci-dessous est une extension de [**47**, th. 4.7] (on se débarrasse de la condition selon laquelle la restriction de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est irréductible). Signalons l'existence d'un analogue local de cette équation fonctionnelle [**57**].

14.4.1. Facteurs ε. — On note N le conducteur de π et $N=\prod_\ell \ell^{n_\ell}$ sa factorisation en un produit de nombres premiers.

Remarque 14.20. — (i) On a un isomorphisme $\check\pi\cong\pi\otimes(\omega_\pi\circ\det)^{-1}$ de représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$. Pour des raisons de rationnalité, l'isomorphisme de représentations encadrées qui lui correspond est, à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}(\pi)^*$, $\phi\mapsto G(\omega_\pi)\omega_\pi^{-1}\phi$. (que l'on notera $\phi\mapsto\phi\otimes G(\omega_\pi)\omega_\pi^{-1}$).

(ii) De même, $\phi\mapsto G(\omega_{\pi,\ell})\omega_{\pi,\ell}^{-1}\phi$ induit un isomorphisme de π_ℓ sur $\check\pi_\ell$ (qui sont tous les deux des sous-espaces de $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*,\mathbf{Q}(\pi)\otimes\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})))$.

Proposition 14.21. — (i) *Pour tout ℓ, il existe*

$$\varepsilon(\pi_\ell)\in\mathbf{Q}(\pi)^*\cdot G(\omega_{\pi,\ell})^{-1}\subset\mathbf{Q}(\pi)\otimes\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty})$$

tel que

$$(\varepsilon(\pi_\ell)\omega_{\pi,\ell})^{-1}\big(\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)_\ell\star v_{\pi,\ell}\big)=\left(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_\ell\star v_{\check\pi,\ell},\quad \textit{si } M\in\ell^{n_\ell}\mathbf{Z}_\ell^*.$$

De plus, $\varepsilon(\pi_\ell)=1$ *si* $\ell\nmid N$ *et* $\varepsilon(\pi_\ell)\varepsilon(\check\pi_\ell)=\omega_{\pi,\ell}(-1)$.

(ii) *Si* $\varepsilon(\pi)=\prod_\ell \varepsilon(\pi_\ell)$, *alors* $\varepsilon(\pi)\in \mathbf{Q}(\pi)^*\cdot G(\omega_\pi)^{-1}$ *et*

$$\big(\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\star v_\pi\big)\otimes(\varepsilon(\pi)\omega_\pi)^{-1}=\big(\begin{smallmatrix}N&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\star v_{\check\pi}.$$

De plus, $\varepsilon(\pi)\varepsilon(\check\pi)=(-1)^k$.

Démonstration. — Par définition de $v_{\pi,\ell}$, on a $\big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}=\omega_{\pi,\ell}(d)v_{\pi,\ell}$, si $\big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\in\widehat\Gamma_0(M)_\ell\subset\mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell)$, et la restriction de $\omega_{\pi,\ell}$ à $\mathbf{Z}_\ell^*$ est triviale si $\ell\nmid N$, et se factorise à travers $(\mathbf{Z}_\ell/M)$ si $\ell\mid N$; en particulier,

$$\omega_{\pi,\ell}\big(\det\big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)=\omega_{\pi,\ell}(a)\omega_{\pi,\ell}(d)$$

Maintenant,

$$\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\M&0\end{smallmatrix}\big)^{-1}=\big(\begin{smallmatrix}0&1/M\\-1&0\end{smallmatrix}\big),\quad \big(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}a&Mb\\c&d\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)=\big(\begin{smallmatrix}d&-c\\-Mb&a\end{smallmatrix}\big)$$

On en déduit que

$$\big(\begin{smallmatrix}a&Mb\\c&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\star\big(\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}\big)=\omega_{\pi,\ell}(a)\,\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell},$$

et donc, si $\big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\in\widehat\Gamma_0(M)_\ell$,

$$\big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\star\big(\big(\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}\big)\otimes\omega_{\pi,\ell}^{-1}\big)=\omega_{\pi,\ell}^{-1}(d)\big(\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}\big)\otimes\omega_{\pi,\ell}^{-1}$$

De même $\big(\begin{smallmatrix}M^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big(\begin{smallmatrix}a&Mb\\c&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell=\big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell$ et donc

$$\big(\begin{smallmatrix}a&Mb\\c&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\star\big(\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\check\pi,\ell}\big)=\omega_{\check\pi,\ell}(d)\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\check\pi,\ell}$$

On a

$$\omega_{\check\pi,\ell}=\omega_{\pi,\ell}^{-1}$$

Comme $\big\{\phi\in\check\pi_\ell,\ \big(\begin{smallmatrix}a&Mb\\c&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\star\phi=\omega_{\check\pi,\ell}(d)\phi,\ \text{si}\ \big(\begin{smallmatrix}a&b\\Mc&d\end{smallmatrix}\big)_\ell\in\widehat\Gamma_0(M)_\ell\big\}$ est de dimension 1, on en déduit l'existence de $\varepsilon(\pi_\ell)$.

L'appartenance de $\varepsilon(\pi_\ell)$ à $\mathbf{Q}(\pi)G(\omega_{\pi,\ell}^{-1})$ résulte, comme dans la preuve du lemme 5.9, de ce que v_π et $v_{\check\pi}$ sont définies sur $\mathbf{Q}(\pi)$; le fait que $\varepsilon(\pi_\ell)=1$ si $\ell\nmid N$ résulte de la normalisation de $v_{\pi,\ell}$ et $v_{\check\pi,\ell}$ (on a imposé que ces fonctions vaillent 1 sur $\mathbf{Z}_p^*$).

Comme $\omega_{\check\pi,\ell}=\omega_{\pi,\ell}^{-1}$,

$$(\omega_{\check\pi,\ell}^{-1}\circ\det)\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star\big((\omega_{\pi,\ell}^{-1}\circ\det)^{-1}\big(\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}\big)\big)=\big(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}=\omega_{\pi,\ell}(-1)v_{\pi,\ell}$$

D'après ce qui précède, le membre de gauche MdG de l'identité ci-dessus vérifie aussi :

$$\begin{aligned}\text{MdG}&=\varepsilon(\pi_\ell)(\omega_{\pi,\ell}\circ\det)\big(\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\check\pi,\ell}\big)\\&=\varepsilon(\pi_\ell)\omega_{\pi,\ell}(M)^{-1}\big(\begin{smallmatrix}1&0\\0&M\end{smallmatrix}\big)_\ell\star\big((\omega_{\check\pi,\ell}^{-1}\circ\det)\big(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\check\pi,\ell}\big)\\&=\varepsilon(\pi_\ell)\omega_{\pi,\ell}(M)^{-1}\varepsilon(\check\pi_\ell)\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&M\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\pi,\ell}\\&=\varepsilon(\pi_\ell)\varepsilon(\check\pi_\ell)v_{\pi,\ell}.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du (i).

Le (ii) se déduit du (i) grâce aux factorisations

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[} \star v_\pi = \otimes_\ell \big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)_\ell \star v_{\pi,\ell} \big), \quad \omega_\pi = \otimes_\ell \omega_{\pi,\ell}$$

et à la formule $\prod_\ell \omega_{\pi,\ell}(-1) = \omega_{\pi,\infty}^{-1}(-1) = (-1)^k$ (qui résulte du lemme 5.1). □

14.4.2. Action de l'involution sur l'élément de Kato

Remarque 14.22. — (i) Si $\omega_\pi^{(p)}$ est le caractère p-adique associé à ω_π, on a $\omega_\pi^{(p)} = (\otimes_{\ell \neq p} \omega_{\pi,\ell}) \otimes \omega_{\pi,p}^{(p)}$ et $\omega_{\pi,p}^{(p)}(x_p) = x_p^{k-2j} \omega_{\pi,p}(x_p)$.

(ii) Les représentations $\check\pi$ et $\pi \otimes \omega_\pi^{-1}$ de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ sont isomorphes, et on peut remplacer les sommes de Gauss intervenant dans les isomorphismes du nº 7.3.1 (point sur la torsion des vecteurs localement algébriques) par les facteurs ε :

$$\begin{aligned} \check\pi^{\mathrm{alg}} &= \{ (\varepsilon(\pi) \omega_\pi^{(p)})^{-1} X^{2j-k} \phi, \ \phi \in \pi^{\mathrm{alg}} \} \\ \check\pi_p^{\mathrm{alg}} &= \{ (\varepsilon(\pi_p) \omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1} X^{2j-k} \phi, \ \phi \in \pi_p^{\mathrm{alg}} \} \\ \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\check\pi)) &= \{ (\varepsilon(\pi_p) \omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1} \phi, \ \phi \in \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)) \} \\ m_{\text{ét}}(\check\pi) &= m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \varepsilon(\pi) \zeta_{\mathrm{B}}^{-a} \end{aligned}$$

On voit $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}$ et $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\check\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}$ comme des formes linéaires sur $m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ et $m_{\text{ét}}(\check\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\check\pi))$ respectivement.

(iii) Il résulte de la rem. 14.22 que l'on a une identification naturelle

$$\big(m_{\text{ét}}(\check\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\check\pi)) \big) \cong \big(m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)) \big) \otimes \tfrac{\varepsilon(\pi)}{\varepsilon(\pi_p)} (\omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1};$$

l'isomorphisme $\big(m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)) \big) \xrightarrow{\sim} \big(m_{\text{ét}}(\check\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\check\pi)) \big)$ qui en résulte est noté $\phi \mapsto \phi \otimes \frac{\varepsilon(\pi)}{\varepsilon(\pi_p)} (\omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1}$. Par dualité, cela fournit

$$\big(m_{\text{ét}}(\check\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\check\pi)) \big)^* \xrightarrow{\sim} \big(m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)) \big)^*$$

noté $\mu \mapsto \mu \otimes \frac{\varepsilon(\pi)}{\varepsilon(\pi_p)} (\omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1}$.

Théorème 14.23. — *Si π est Π_p-compatible, dans $\big(m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi)) \big)^*$, on a l'identité suivante* :

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)_p \star (\mathbf{z}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}) = -\big(\left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_p \star (\mathbf{z}(\check\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}) \big) \otimes \tfrac{\varepsilon(\pi)}{\varepsilon(\pi_p)} (\omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1},$$

où $M = \prod_{\ell \neq p} \ell^{n_\ell}$.

Démonstration. — Il s'agit de prouver que les deux membres prennent la même valeur sur tout $\gamma \otimes \phi \in m_{\text{ét}}(\pi) \otimes \Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$. D'après le th. 14.18, on a $\mathbf{z}(\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = (0,\infty) \otimes v_\pi^{]p[}$ et $\mathbf{z}(\check\pi) \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = (0,\infty) \otimes v_{\check\pi}^{]p[}$. Le membre de gauche devient donc

$$\big\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)_p \star (0,\infty), \gamma \otimes v_\pi^{]p[} \otimes \phi \big\rangle = -\big\langle (0,\infty), \gamma \otimes \big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{]\infty,p[} \star v_\pi^{]p[} \big) \otimes \phi \big\rangle \tag{14.24}$$

(Le membre de gauche est la définition, et l'égalité avec le membre de droite vient du lemme 14.3.) Maintenant, il résulte de la prop. 14.21 que

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{]\infty,p[} \star v_\pi^{]p[} = \otimes_{\ell \neq p} \big(\big(\left(\begin{smallmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_\ell \star v_{\check\pi,\ell} \big) \otimes (\varepsilon(\pi_\ell) \omega_{\pi,\ell}) \big)$$

L'invariance de $(0,\infty)$ par multiplication par un caractère fait que l'on ne change pas le membre de droite de (14.24) en multipliant par $(\omega_\pi^{(p)})^{-1}$. En utilisant alors les identités

$$\prod_{\ell\neq p}\varepsilon(\pi_\ell)=\tfrac{\varepsilon(\pi)}{\varepsilon(\pi_p)},\quad \omega_\pi^{(p)}=\big(\prod_{\ell\neq p}\omega_{\pi,\ell}\big)\omega_{\pi,p}^{(p)}$$

cela permet de mettre le membre de droite de (14.24) sous la forme

$$-\big\langle(0,\infty),\big(\gamma\otimes\big(\otimes_{\ell\neq p}\big(\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\star v_{\check\pi,\ell}\big)\big)\otimes\phi\big)\otimes\tfrac{\varepsilon(\pi)}{\varepsilon(\pi_p)}(\omega_{\pi,p}^{(p)})^{-1}\big\rangle$$

On conclut en utilisant le fait (lemme 14.3) que $\big(\begin{smallmatrix}M&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\star(0,\infty)=(0,\infty)$. $\square$

15. Interpolation des éléments de Kato

Dans ce chapitre, on associe (th. 15.25, rem. 15.29, th. 15.31) à la représentation [33] ρ_T du n° 13.1.1 un système d'Euler $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)$, pour $(M,Np)=1$, se spécialisant en les éléments de Kato du n° 14.3.4 aux points classiques (multipliés par des facteurs d'Euler en les ℓ divisant N). On utilise la factorisation de la cohomologie complétée pour voir $(0,\infty)$ comme une forme linéaire sur [34] $\rho_T\otimes_T\Pi_p(\check\rho_T)$. Cette forme est invariante par $\big(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_p$, et donne naissance à un élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$ de $\rho_T^\diamond\otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\widehat\otimes\rho_T)$ d'après la prop. 2.2. En appliquant ce qui précède à $\rho_{T_M}:=\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*]\otimes\rho_T$, on obtient (prop. 15.7) un système d'éléments locaux.

Par construction, $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$ se spécialise (prop. 15.3) en un multiple explicite de l'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)_p$ du n° 14.3.4 qui est le localisé d'un élément global (th. 14.18). Sous la condition $\mu=0$, la suite exacte de Poitou-Tate et des techniques de théorie d'Iwasawa permettent d'en déduire (th. 15.25) que $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$ est le localisé d'un élément global $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T,\iota_{\mathrm{Em}})$; sans la condition $\mu=0$, on obtient un élément global (rem. 15.29), mais seulement après extension des scalaires à $\mathrm{Fr}(T)$. On prouve au chap. 17 que l'extension des scalaires à $\mathrm{Fr}(T)$ est en fait inutile (th. 17.10).

On suppose $p\neq 2$ dans ce qui suit.

Comme on veut pouvoir tordre par des caractères de $\mathbf{Z}_p^*$ et pas seulement par des caractères de $1+p\mathbf{Z}_p$, on va remplacer l'algèbre de Hecke $T=T(Np^\infty)_{\mathfrak m}:=T(\mathfrak m)$ du n° 13.1.1 par $T:=T(\mathfrak m)[(\mathbf{Z}/p)^*]$. On a des identifications

$$T=T(\mathfrak m)[(\mathbf{Z}/p)^*]=\prod_\eta T(\mathfrak m\otimes\eta),$$

où η décrit les caractères $(\mathbf{Z}/p)^*\to\mathbf{Z}_p^*$, et $T(\mathfrak m\otimes\eta)$ est la localisée de $T(Np^\infty)$ en l'idéal maximal $\mathfrak m\otimes\eta$ tel que $\overline\rho_{T(\mathfrak m\otimes\eta)}=\overline\rho_{T(\mathfrak m)}\otimes\eta$ (i.e. $\mathrm{Tr}(\rho_{T(\mathfrak m\otimes\eta)}(\sigma_\ell))=$

33. En particulier, l'idéal $\mathfrak m$ est non-eisenstein ; comme on veut pouvoir utiliser la factorisation d'Emerton au niveau entier (th. 13.11), on suppose que $\mathfrak m$ est générique (grâce au th. 13.13 les constructions qui suivent restent valables sans cette restriction si on veut bien se permettre d'introduire des dénominateurs, mais il est difficile de controler les dénominateurs en question).

34. Voir le début du § 15.2 pour le passage de $\rho_T^\diamond$ à $\check\rho_T$.

$\eta(\ell)\mathrm{Tr}(\rho_{T(\mathfrak{m})}(\sigma_\ell))$, si $\ell \nmid Np$). On dispose alors de

$$\rho_T : G_{\mathbf{Q},S} \to \mathbf{GL}_2(T) \quad (\text{on a } \rho_T = \mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/p)^*] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \rho_{T(\mathfrak{m})}).$$

On pose alors

$$\mathscr{X} := \mathrm{Spec}(T) \quad \text{et} \quad \mathscr{X}^{\mathrm{cl}}(\mathscr{O}_L) := \{x \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L),\ x \text{ classique}\}.$$

On définit $H^1_c[\rho_T]$ comme le sous-$\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$-module de $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ engendré par $\oplus_\eta H^1_c(Np^\infty)_{\mathfrak{m}\otimes\eta}$. Comme on a localisé en des idéaux non-eisenstein, il n'y a pas de différence entre cohomologie complétée et cohomologie complétée à support compact (mais on veut voir $H^1_c[\rho_T]$ comme un sous-module de la cohomologie à support compact pour pouvoir l'accoupler avec $(0,\infty)$, d'où la notation), et on obtient la somme directe des twists de l'ancien $H^1[\rho_T]$ par les η ci-dessus. Le th. 13.11 se transpose verbatim en faisant la somme directe sur les η (si on voulait inclure $p = 2$, il faudrait faire un peu plus attention).

15.1. Élimination d'une variable

15.1.1. La $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique. — Soit $\mathbf{Q}_\infty$ la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbf{Q}$: c'est le sous corps de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ fixé par le sous-groupe de torsion de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q})$. On note H et H_0 les groupes de Galois sur $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ et $\mathbf{Q}_\infty$ (il serait plus normal de les noter Γ et Γ_0 mais Γ est déjà utilisé pour les groupes de congruence...). Le caractère cyclotomique fournit des identifications :

$$H = \mathbf{Z}_p^*, \quad \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\mu}_{p-1},$$

et la décomposition $\mathbf{Z}_p^* = \boldsymbol{\mu}_{p-1} \times (1 + p\mathbf{Z}_p)$ fournit une identification

$$\iota : H_0 \xrightarrow{\sim} 1 + p\mathbf{Z}_p,$$

et ι peut aussi être vu comme un caractère privilégié de H_0.

Soient Λ et Λ_0 les algèbres de groupes complétées

$$\Lambda_0 = \mathbf{Z}_p[[H_0]] \quad \text{et} \quad \Lambda = \mathbf{Z}_p[[H]] = \Lambda_0 \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q})].$$

Posons

$$\mathscr{W} = \mathrm{Spec}\,\Lambda, \quad \mathscr{W}_0 = \mathrm{Spec}\,\Lambda_0 \quad \text{et} \quad \mathscr{W}^{(p-1)} = \mathrm{Spec}\big(\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q})]\big).$$

Alors, si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, $\mathscr{W}(\mathscr{O}_L)$ (resp. $\mathscr{W}_0(\mathscr{O}_L)$) est l'ensemble des caractères continus de H (resp. H_0) à valeurs dans $\mathscr{O}_L^*$ et $\mathscr{W}^{(p-1)}(\mathscr{O}_L) = \mathscr{W}^{(p-1)}(\mathbf{Z}_p)$ est l'ensemble des caractères $\eta : \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q}) \to \boldsymbol{\mu}_{p-1}$. On a $\mathscr{W} = \mathscr{W}_0 \times \mathscr{W}^{(p-1)}$.

Si $A = \Lambda, \Lambda_0, \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q})]$, alors A est naturellement un $A[G_\mathbf{Q}]$-module puisque H, H_0 et $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q})$ sont des quotients de $G_\mathbf{Q}$. De plus, en tant que $\mathbf{Z}_p[G_\mathbf{Q}]$-module, $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q})] = \oplus_{\eta \in \mathscr{W}^{(p-1)}} \mathbf{Z}_p(\eta)$. Il s'ensuit que, si V est un $G_{\mathbf{Q},S}$-module, on a une décomposition

$$\Lambda \otimes V = \oplus_{\eta \in \mathscr{W}^{(p-1)}} \Lambda_0 \otimes V(\eta),$$

ce qui permet de ramener l'étude de $\Lambda\otimes V$ à celle des $\Lambda_0\otimes V(\eta)$; l'intérêt étant que Λ_0 est plus simple que Λ d'un point de vue algébrique : le groupe H_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, et le choix d'un générateur γ fournit un isomorphisme $\Gamma_0=\mathbf{Z}_p[[\gamma-1]]$.

15.1.2. Descente de T à T_0. — Le caractère cyclotomique fournit une identification $G_{\mathbf{Q},S}^{\rm ab}=\mathbf{Z}_S^*$. Maintenant, on peut décomposer $\mathbf{Z}_S^*$, de manière naturelle, sous la forme $\Delta\times(1+p\mathbf{Z}_p)$, où Δ est le produit d'un groupe fini par un groupe profini d'ordre premier à p (i.e. Δ est le produit de $\boldsymbol{\mu}_{p-1}\subset\mathbf{Z}_p^*$ et des $\mathbf{Z}_\ell^*$, pour $\ell\in S\smallsetminus\{p\}$). Il s'ensuit que, si A est un quotient de T, un caractère continu $\eta:\mathbf{Z}_S^*\to A^*$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\eta_0\eta_p^2$, où η_0 est d'ordre fini, trivial sur $1+p\mathbf{Z}_p$, et η_p est trivial sur Δ (et à valeurs dans $1+\mathfrak{m}_A$). On en déduit que toute représentation $\rho:G_{\mathbf{Q},S}\to\mathbf{GL}_2(A)$ peut se factoriser, de manière unique, sous la forme $\rho=\rho_0\otimes\eta_p$, où le caractère de $\mathbf{Z}_S^*$ correspondant à $\det\rho_0$ est trivial sur $1+p\mathbf{Z}_p$ et celui correspondant à η_p est trivial sur Δ. D'où une factorisation :

$$T_{\mathfrak{m}}=\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0,\quad(\text{et donc }T=\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0)$$

qui, elle-même, fournit une factorisation

$$\rho_{\mathfrak{m}}=\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_0},\quad(\text{et donc }\rho_T=\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_0})$$

et, d'après le n° 3.5, des factorisations

$$\Pi_p^*(\rho_T)=\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\Pi_p^*(\rho_{T_0})\quad\text{et}\quad\Pi_p(\rho_T)=\mathscr{C}(H,\mathbf{Z}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\Pi_p(\rho_{T_0})$$
$$\Pi_\ell(\rho_T)=\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}_p}\Pi_\ell(\rho_{T_0}),\ \text{si }\ell\neq p.$$

15.1.3. Points classiques. — Posons $\mathscr{X}_0=\operatorname{Spec}T_0$. Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et si $x\in\mathscr{X}_0(\mathscr{O}_L)$, on note $\mathfrak{p}_x$ l'idéal premier de T_0 qui lui correspond, et ρ_x la représentation $(T_0/\mathfrak{p}_x)\otimes_{T_0}\rho_{T_0}$. On dit que x *est classique* si ρ_x est la tordue par un caractère d'une représentation attachée à une forme modulaire primitive de poids ≥ 2.

Remarque 15.1. — Par définition de T_0, la somme des poids de Hodge-Tate de ρ_x est 0. Il s'ensuit que x est classique si et seulement si les poids de Hodge-Tate de ρ_x sont de la forme $\frac{1-k_x}{2},\frac{k_x-1}{2}$, avec $k_x\geq 2$, et[35] $\rho_x\otimes\iota^{(1-k_x)/2}$ est la représentation associée à une forme modulaire f_x de poids k_x.

On note $\mathscr{X}_0^{\rm cl}$ l'ensemble des points classiques et $\mathscr{X}_0^{\rm cl,+}$ le sous-ensemble des $x\in\mathscr{X}_0^{\rm cl}$, tels que la restriction $\rho_{x,p}$ de ρ_x à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est irréductible. Alors, si $\mathfrak{m}$ est générique, $\mathscr{X}_0^{\rm cl}$ et $\mathscr{X}_0^{\rm cl,+}$ sont zariski-denses dans $\operatorname{Spec}T_0[\frac{1}{p}]$, grâce aux théorèmes « big $R=$ big T » (méthode de la fougère infinie).

35. $\iota:H_0\to 1+\mathbf{Z}_p$ est le caractère privilégié défini ci-dessus.

15.2. Construction d'un système d'Euler local

On cherche à interpoler les éléments de Kato via $(0,\infty)$. Comme, d'après le th. 14.18, $\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(m_{\text{ét}}(\pi))) = \mathbf{z}_{(0,\infty)}(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}$, on est amené à tordre la cohomologie complétée par ζ_{B} pour faire disparaître le ζ_{B}^{-1} ci-dessus.

On pose $\check\rho_T = \rho_T^{\diamond}(1)$. La factorisation du th. 13.11 fournit une identification :

$$\rho_T\otimes_T \Pi(\check\rho_T)\equiv H^1_c[\rho_T(-1)]\otimes\zeta_{\mathrm{B}}.$$

A priori, le produit tensoriel devrait être au-dessus de l'algèbre de Hecke T' correspondant à $\rho_T(-1)$, mais $T'\cong T$ car $\mathscr{X}'=\operatorname{Spec}T'$ et $\mathscr{X}=\operatorname{Spec}T$ sont tous deux isomorphes à $\mathscr{X}_0\times\mathscr{W}$, et l'isomorphisme $T'\cong T$ correspond à $(\rho,\eta)\mapsto(\rho,\eta\varepsilon_p^{-1})$ de $\mathscr{X}$ dans $\mathscr{X}'$.

On renvoie au § 3.3 pour les notations ci-dessous ($v_{T,\ell}$, $v'_{T,\ell}$, $\chi_{\ell,i}$, etc.), avec $\check\rho_T$ au lieu de ρ_T. En particulier, les polynômes P_ℓ de la rem. 3.28 sont reliés aux facteurs d'Euler de $\check\rho_T$ et pas ceux de ρ_T.

15.2.1. L'élément de base $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})_p$. — On prend pour S l'ensemble des nombres premiers divisant Np.

- *Les éléments* $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)_p$ *et* $\mathbf{z}^S(\rho_T)_p$.— Soit

$$\psi_S = v_T^{]S[}\otimes\big(\otimes_{\ell\in S\smallsetminus\{p\}} v'_{T,\ell}\big).$$

Notons $(0,\infty)_{T,S}$ la forme bilinéaire

$$v\otimes\phi\mapsto\langle(0,\infty),(v\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1})\otimes\psi_S\otimes\phi\rangle$$

sur $\rho_T\otimes\Pi_p(\check\rho_T)$. On a donc [36]

$$(0,\infty)_{T,S}\in\rho_T^{\diamond}\otimes\Pi_p^{*}(\check\rho_T).$$

Maintenant, $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty,p[}\star\psi_S=\psi_S$ puisque $v'_{T,\ell}$ est fixe par $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_\ell^{*}&\mathbf{Z}_\ell\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Il résulte du cor. 14.4 que $(0,\infty)_{T,S}$ est invariante par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_p$; elle définit donc, via la prop. 2.2, un élément

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)_p\in\rho_T^{\diamond}\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\otimes\rho_T).$$

On note

$$\mathbf{z}^S(\rho_T)_p\in\rho_T^{\diamond}\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\rho_T)$$

l'image de $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)_p$ via l'application naturelle $\Lambda\otimes\rho_T\to\rho_T$.

- *L'élément* $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})_p$.— Par ailleurs,

$$\rho_T\otimes\Pi_p(\check\rho_T)=\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^{*},\mathscr{O}_L)\widehat\otimes_{\mathscr{O}_L}(\rho_{T_0}\otimes_T\Pi_p(\check\rho_{T_0}))$$

Il s'ensuit que

$$\rho_T^{\diamond}\otimes_T\Pi_p^{*}(\check\rho_T)=\Lambda\widehat\otimes_{\mathbf{Z}_p}(\rho_{T_0}^{\diamond}\otimes_{T_0}\Pi_p^{*}(\check\rho_{T_0})).$$

---

36. Si A est une $\mathscr{O}_L$-algèbre et si M est un A-module, on pose $M^{\diamond}=\operatorname{Hom}_A(M,A)$ et $M^{*}=\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_L}(M,\mathscr{O}_L)$. S'il y a ambiguïté sur A, on écrit $M^{A\text{-}*}$ au lieu de $M^{\diamond}$.

La multiplication par un caractère de $\mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*,\mathbf{Z}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}(\rho_{T_0}\otimes_T \Pi_p(\check\rho_{T_0}))\subset H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(A),\mathscr{O}_L))$ est induite par celle sur $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*,\mathbf{Z}_p)$. On en déduit que l'invariance de $(0,\infty)$ par torsion par un caractère (cf. rem. 14.2) implique que

$$(0,\infty)_{T,S}=1\otimes\mu(\rho_{T_0}),\quad \text{avec } \mu(\rho_{T_0})\in\rho_{T_0}^\diamond\otimes_{T_0}\Pi_p^*(\check\rho_{T_0}).$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, $\mu(\rho_{T_0})$ est invariante par $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_p$; elle définit donc, via la prop. 2.2, un élément

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p\in\rho_{T_0}^\diamond\otimes_{T_0}H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_0}).$$

15.2.2. Lien entre $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$, $\mathbf{z}^S(\rho_T)_p$ et $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$. — Comme nous allons le voir, les éléments $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$, $\mathbf{z}^S(\rho_T)_p$ et $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$ se déterminent mutuellement. Dans certaines situations, il est plus agréable de travailler avec $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$ (cela permet d'utiliser des techniques de théorie d'Iwasawa), et dans d'autres avec $\mathbf{z}^S(\rho_T)_p$.

Les identifications $\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0=T$ et $\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_0}^\diamond=\rho_T^\diamond$ permettent de définir un certain nombre de morphismes $G_{\mathbf{Q},S}$-équivariant.

$\diamond$ On note $(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{lin}}$ (res. $(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{semi}}$) le $G_{\mathbf{Q},S}$-module avec *action Λ-linéaire* (resp. *semi-linéaire*) de $G_{\mathbf{Q},S}$, i.e. $\sigma([a]\otimes v)=[a]\otimes\sigma(v)$ (resp. $\sigma([a]\otimes v)=[\overline{\sigma}\,a]\otimes\sigma(v)$) si $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et $v\in\rho_T$, où $\overline{\sigma}=\boldsymbol{\varepsilon}_p(\sigma)$ est l'image de σ dans $\mathbf{Z}_p^*$.

$\diamond$ On note $\Delta:(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{semi}}\to(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{lin}}$ l'application T_0-linéaire définie par

$$\Delta([a]\otimes[b]\otimes v)=[ab^{-1}]\otimes[b]\otimes v,\quad \text{si } a,b\in\mathbf{Z}_p^* \text{ et } v\in\rho_{T_0}.$$

$\diamond$ On définit $\iota^{\mathrm{lin}}:\rho_T\to(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{lin}}$ et $\iota^{\mathrm{semi}}:\rho_T\to(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{semi}}$ par

$$\iota^{\mathrm{lin}}(z)=1\otimes z,\quad \iota^{\mathrm{semi}}([a]\otimes v)=[a]\otimes[a]\otimes v,\ \text{si } a\in\mathbf{Z}_p^* \text{ et } v\in\rho_{T_0}.$$

$\diamond$ Enfin, on dispose de $p^{\mathrm{lin}}:(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{lin}}\to\rho_T$ et $p^{\mathrm{semi}}:(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{semi}}\to\rho_T$ induites par l'augmentation $\Lambda\to\mathbf{Z}_p$ envoyant $[a]$ sur 1, si $a\in\mathbf{Z}_p^*$.

Toutes ces applications sont $G_{\mathbf{Q},S}$-équivariantes, et on a :

$$p^{\mathrm{lin}}\circ\iota^{\mathrm{lin}}=\mathrm{id},\quad p^{\mathrm{semi}}\circ\iota^{\mathrm{semi}}=\mathrm{id},\quad \Delta\circ\iota^{\mathrm{semi}}=\iota^{\mathrm{lin}}.$$

La $G_{\mathbf{Q},S}$-équivariance de ces applications fournit des applications ayant les mêmes noms entre les $H^1(G_{\mathbf{Q}_p},-)$. La discussion ci-dessus montre que $\mu\in\rho_T^\diamond\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}_p},(\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)^{\mathrm{lin}})$ est dans l'image de ι^{lin} si et seulement l'élément de $\rho_T^\diamond\otimes_T\Pi_p^*(\check\rho_T)$ qui lui correspond est invariant par torsion par un caractère. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^S(\rho_T)_p&=p^{\mathrm{semi}}(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p)\\ \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p&=\mathbf{z}^S(\rho_T)_p\\ \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p&=\iota^{\mathrm{semi}}(\mathbf{z}^S(\rho_T)_p)\\ \Delta(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p)&=\iota^{\mathrm{lin}}(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p)\end{aligned}\tag{15.2}$$

(La première égalité est une définition, les trois autres s'en déduisent en utilisant les relations entre les applications ci-dessus et le fait que $\Delta(\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p)$ est dans l'image de ι^{lin} puisque $(0,\infty)_{T,S}$ est invariant par torsion par un caractère.)

15.2.3. Spécialisation en un point classique. — Si $x \in \mathscr{X}(\mathscr{O}_L)$, on note

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_x)_p \in \rho_x^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \rho_x)$$

l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$.

Comme $\mathscr{X}(\mathscr{O}_L) = \mathscr{X}_0(\mathscr{O}_L) \times \mathscr{W}(\mathscr{O}_L)$, on peut écrire x sous la forme $x = (x_0, \eta)$. Alors $\rho_{(x_0,\eta)} = \rho_{x_0} \otimes \eta$ et donc

$$\rho_{(x_0,\eta)}^* = \rho_{x_0}^* \otimes \eta^{-1} \quad \text{et} \quad H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \rho_{(x_0,\eta)}) = H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \rho_{x_0}) \otimes \eta.$$

On obtient donc une identification naturelle (les η et η^{-1} se compensent) :

$$\rho_{(x_0,\eta)}^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \rho_{(x_0,\eta)}) = \rho_{x_0}^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \rho_{x_0}).$$

L'invariance de $(0,\infty)$ par torsion par un caractère implique, modulo cette identification, que

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{(x_0,\eta)})_p = \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{x_0})_p, \quad \text{pour tout } \eta.$$

Si x est classique, et donc $\rho_x = m_{\text{ét}}(\pi)$ pour une représentation cohomologique π de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, on a défini (cf. rem. 14.19) des éléments

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)_p \in \rho_x^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda \otimes \rho_x), \quad \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x) \in \rho_x^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes \rho_x).$$

Les éléments $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_x)_p$ et $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)_p$ sont tous les deux obtenus à partir de $(0,\infty)$. La différence entre leurs constructions est le remplacement du nouveau vecteur $v_\pi^{]p[}$ par ψ_S, ce qui introduit un facteur d'Euler. Plus précisément, on a le résultat suivant, dans lequel $P_\ell \in 1 + X\mathscr{O}_L[X]$ est le polynôme de la rem. 3.28 pour $\Pi_\ell(\check{\rho}_x)$.

Proposition 15.3. — *Si $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl}}$, alors*

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_x)_p = \Big(\prod_{\ell \in S \setminus \{p\}} P_\ell([\sigma_\ell^{-1}])\Big) \cdot \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)_p.$$

Démonstration. — D'après la rem. 3.28, la spécialisation $\psi_{x,S}$ de ψ_S en x est

$$\prod_{\ell \in S \setminus \{p\}} P_\ell\Big(\big(\begin{smallmatrix} \ell^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)_\ell\Big) \star v_\pi^{]p[}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_x)_p, v\otimes\phi_p\rangle &= \big\langle (0,\infty), (v\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1})\otimes\big(\prod_{\ell\in S\setminus\{p\}} P_\ell\big(\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)\star v_\pi^{]p[}\big)\otimes\phi_p\big\rangle\\ &= \big\langle\big(\prod_{\ell\in S\setminus\{p\}} P_\ell\big(\big(\begin{smallmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)\big)\star(0,\infty), \iota_\pi((v\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1})\otimes v_\pi^{]p[}\otimes\phi_p)\big\rangle\\ &= \big\langle\big(\prod_{\ell\in S\setminus\{p\}} P_\ell\big(\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p\big)\big)\star(0,\infty), \iota_\pi((v\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1})\otimes v_\pi^{]p[}\otimes\phi_p)\big\rangle\\ &= \big\langle\big(\prod_{\ell\in S\setminus\{p\}} P_\ell([\sigma_\ell^{-1}])\big)\cdot\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)_p, v\otimes\phi_p\big\rangle\end{aligned}$$

(Le remplacement de $\big(\begin{smallmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_\ell$ par $\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p$ vient de la troisième identité du cor. 14.4 ; celui de $\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)_p$ par $[\sigma_\ell^{-1}]$ vient de la prop. 2.2.) □

Remarque 15.4. — On a construit un objet local $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_T)_p$ dont les spécialisations en un ensemble zariski-dense sont des localisations de classes globales. On peut donc espérer que $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)_p$ soit la localisation d'un objet global interpolant les classes précédentes. C'est ce que nous prouvons aux §§ 15.6 et 15.7.

15.2.4. Construction de la tour d'éléments. — Soit M premier à Np.

- *Le module $H_c^1(Np^\infty, M)$.*— Soient :

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}(Np^\infty, M) &= \mathrm{Ker}\big(\widehat{\Gamma}(Np^\infty)\xrightarrow{\det}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})^*\to(\mathbf{Z}/M)^*\big)\\ H_c^1(Np^\infty, M) &= H_c^1\big(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}\big(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty, M), \mathscr{O}_L\big)\big)\end{aligned}$$

Si $\alpha\in\mathscr{C}((\mathbf{Z}/M)^*, \mathscr{O}_L)$, notons $\tilde\alpha\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)$ la fonction définie par $\tilde\alpha(g) = \alpha(\pi_M(\det g))$, où π_M est la composée $\mathbf{A}^*\to\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*\mathbf{R}_+^*\cong\widehat{\mathbf{Z}}^*\to(\mathbf{Z}/M)^*$. L'application $\phi\otimes\alpha\mapsto\phi\tilde\alpha$ induit un isomorphisme

$$\mathscr{C}\big(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty, M), \mathscr{O}_L\big)\cong\mathscr{C}\big(\mathbb{G}(\mathbf{A})/\widehat{\Gamma}(Np^\infty), \mathscr{O}_L\big)\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathscr{C}\big((\mathbf{Z}/M)^*, \mathscr{O}_L\big)$$

qui est $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-équivariant si on fait agir $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ trivialement sur $(\mathbf{Z}/M)^*$. On en déduit un isomorphisme

$$H_c^1(Np^\infty, M)\cong H_c^1(Np^\infty)\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathscr{C}\big((\mathbf{Z}/M)^*, \mathscr{O}_L\big).$$

Le membre de gauche est un sous-espace de $H_c^1(NMp^\infty)$ qui est stable par $T(NMp^\infty)$ agissant à travers

$$T(Np^\infty, M) = T(Np^\infty)[(\mathbf{Z}/M)^*] = T(Np^\infty)\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*],$$

et l'isomorphisme ci-dessus commute à l'action de $T(Np^\infty, M)$. Il commute aussi à l'action de $G_{\mathbf{Q},MNp}$ agissant sur $\mathscr{C}((\mathbf{Z}/M)^*, \mathscr{O}_L)$ via l'identification $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_M)/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/M)^*$ fournie par le caractère cyclotomique.

• *L'algèbre T_M et les objets associés.*— Soit S_M la réunion de S et des premiers divisant M. Posons

$$T_M = T[(\mathbf{Z}/M)^*] \quad \text{et} \quad \rho_{T_M} = T_M \otimes_T \rho_T = \mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \rho_T,$$
$$T_{0,M} = T_0[(\mathbf{Z}/M)^*] \quad \text{et} \quad \rho_{T_{0,M}} = T_{0,M} \otimes_{T_0} \rho_{T_0} = \mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \rho_{T_0}.$$

Alors ρ_{T_M} est muni d'une action naturelle de $G_{\mathbf{Q}}$ par la recette du n° 3.5 (via l'identification $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_M)/\mathbf{Q}) = (\mathbf{Z}/M)^*$), et cette action se factorise à travers $G_{\mathbf{Q},S_M}$. Notons $H^1_c[\rho_{T_M}]_{S_M}$ le sous-$\mathbb{G}(\mathbf{Q}_{S_M})$-module de $H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ engendré par $\big(\oplus_\eta H^1_c(Np^\infty)_{\mathfrak{m}\otimes\eta}\big) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathscr{C}((\mathbf{Z}/M)^*, \mathscr{O}_L)$. La factorisation de $H^1_c[\rho_T]_{S_M}$ induit une factorisation

$$H^1_c[\rho_{T_M}(-1)]_{S_M} \otimes \zeta_{\mathrm{B}} \cong \rho_{T_M} \otimes \Pi_{S_M}(\check\rho_{T_M}), \quad \text{avec } \Pi_{S_M}(\check\rho_{T_M}) = \otimes_{\ell\in S_M} \Pi_\ell(\check\rho_{T_M}),$$

où les produits tensoriels sont au-dessus de T_M, et $\Pi_\ell(\check\rho_{T_M})$ est obtenue à partir de $\Pi_\ell(\check\rho_T)$ par la recette du n° 3.5 : en particulier,

$$\Pi^{]p[}_{S_M}(\check\rho_{T_M}) = \mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*] \otimes \Pi^{]p[}_{S_M}(\check\rho_T).$$

• *L'élément $\psi_{S,M}$.*— Rappelons que $\Pi_\ell(\check\rho_T) \subset \mathrm{LC}(\mathbf{Q}_\ell^*, \mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_{\ell^\infty}] \otimes T)^{\sigma_p=1}$, si $\ell \neq p$, qu'il contient les fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_\ell^*$, et que $v'_{T,\ell} = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_\ell^*}$. Si $n \geq 1$, on pose

$$v^{(n)}_{T,\ell} = \mathbf{1}_{1+\ell^n\mathbf{Z}_\ell} \in \mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_{\ell^n}] \otimes \Pi_\ell(\check\rho_T)$$

et, si $(M, pN) = 1$ admet pour factorisation $M = \prod_{\ell|M} \ell^{n_\ell}$,

$$\psi_{S,M} = \sum [a]_M \otimes \Big(\big(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[} \star \big(\psi_S \cdot \big(\otimes_{\ell|M} v^{(n_\ell)}_{T,\ell}\big)\big)\Big) \in \mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_M] \otimes \Pi^{]p[}_{S_M}(\check\rho_T),$$

où a décrit un système de représentants de $(\mathbf{Z}/M)^*$ dans $\mathbf{Q}$, et $[a]_M$ est l'image de a par $(\mathbf{Z}/M)^* \hookrightarrow \mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*]$. (Le résultat ne dépend pas du choix du système de représentants.)

Lemme 15.5. — (i) $\psi_{S,M} \in \Pi^{]p[}_{S_M}(\check\rho_{T_M})$.

(ii) $\big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[} \star \psi_{S,M} = \psi_{S,M}$.

Démonstration. — Pour prouver le (i), il s'agit de vérifier que $\sigma_p(\psi_{S,M}(x)) = \psi_{S,M}(px)$. Or, tout est invariant par σ_p (car à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$) sauf $[a]_M$ pour lequel on a $\sigma_p([a]_M) = [pa]_M$ (formule (3.29)). Par ailleurs,

$$\big(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[} \star \psi_S = \psi_S, \quad \Big(\big(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[} \star v^{(n_\ell)}_{T,\ell}\Big)(x) = v^{(n_\ell)}_{T,\ell}(a^{-1}x) = v^{(n_\ell)}_{T,\ell}((pa)^{-1}px).$$

Le résultat est donc une conséquence de ce que les pa forment aussi un système de représentants de $(\mathbf{Z}/M)^*$.

Le (ii) résulte des relations (formule (3.29) pour la première)

$$\big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[} \star [a]_M = [ap^{-1}]_M, \quad \big(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[}\big(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[} = \big(\begin{smallmatrix} pa^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[}. \quad \square$$

• *L'élément* $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})_p$.— Le (ii) du lemme permet, comme précédemment, de définir

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_T)_p &\in \rho^\diamond_{T_M}\otimes_{T_M} H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_M}) = \rho^\diamond_T\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda[(\mathbf{Z}/M)^*]\widehat{\otimes}\rho_T)\\ \mathbf{z}^S_M(\rho_T)_p &\in \rho^\diamond_T\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*]\otimes\rho_T)\\ \mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})_p &\in \rho^\diamond_{T_0}\otimes_{T_0} H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda[(\mathbf{Z}/M)^*]\widehat{\otimes}\rho_{T_0})\end{aligned}$$

à partir de la forme bilinéaire $v\otimes\phi\mapsto\langle(0,\infty),(v\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1})\otimes\psi_{S,M}\otimes\phi\rangle$. Pour $M=1$, on retombe sur les éléments $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)_p$, $\mathbf{z}^S(\rho_T)_p$, $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})_p$ du n° 15.2.3. Ces éléments vérifient les relations (15.2) ; en particulier :

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})_p = \mathbf{z}^S_M(\rho_T)_p,\quad \mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_T)_p = \iota^{\mathrm{semi}}(\mathbf{z}^S_M(\rho_T)_p) \tag{15.6}$$

15.2.5. Relations de systèmes d'Euler. — Si $M \mid M'$, la projection naturelle $\Lambda[(\mathbf{Z}/M')^*]\to\Lambda[(\mathbf{Z}/M)^*]$ induit une application :

$$\mathrm{cor}^M_{M'} : H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M')^*]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\rho_T)\to H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)^*]\otimes_{\mathbf{Z}_p}\rho_T).$$

Si $\ell\nmid pN$, on dispose [37] de $\chi_{\ell,i}:\mathbf{Q}_\ell^*\to T^*$, pour $i=1,2$, cf. n° **??**. On définit :

$$\chi_{\ell,i,M}:\mathbf{Q}_\ell^*\to T_M^*,\quad \chi_{\ell,i,M}(x)=\chi_{\ell,i}(x)\,[x]_M,$$

où $[x]_M$ est obtenu via la projection $\mathbf{Q}_\ell^*\to\mathbf{A}^*\to\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*\mathbf{R}_+^*\cong\widehat{\mathbf{Z}}^*\to(\mathbf{Z}/M)^*$.

Proposition 15.7. — (Relations de systèmes d'Euler)

(i) *Si* $\ell\nmid pNM$, *alors*

$$\mathrm{cor}^M_{M\ell}\mathbf{z}^S_{M\ell}(\rho_T)_p = P_{\ell,M}([\sigma_\ell^{-1}])\cdot\mathbf{z}^S_M(\rho_T)_p,$$

où l'on a posé

$$P_{\ell,M}(X) = 1-(\chi_{\ell,1,M}(\ell)+\chi_{\ell,2,M}(\ell))X+(\chi_{\ell,1,M}(\ell)\chi_{\ell,2,M}(\ell))X^2.$$

(ii) *Si* $\ell\mid M$, *alors*

$$\mathrm{cor}^M_{M\ell}\mathbf{z}^S_{M\ell}(\rho_T)_p = \mathbf{z}^S_M(\rho_T)_p.$$

Démonstration. — La projection naturelle $(\mathbf{Z}/M')^*\to(\mathbf{Z}/M)^*$ induit déjà une application

$$\mathrm{cor}^M_{M'}:\Pi^{]p[}_{S_{M'}}(\check\rho_{T_{M'}})\to\Pi^{]p[}_{S_M}(\check\rho_{T_M}),$$

et la formule (3.27) se traduit, si $\ell\nmid pNM$, par la relation :

$$\mathrm{cor}^M_{M\ell}\psi_{S,M\ell} = P_{\ell,M}\big(\big(\begin{smallmatrix}\ell^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_\ell\big)\star\psi_{S,M}$$

(On utilise un système de représentants de $(\mathbf{Z}/M\ell)^*$ adapté à l'isomorphisme $(\mathbf{Z}/M\ell)^*\cong(\mathbf{Z}/\ell)^*\times(\mathbf{Z}/M)^*$ et la relation $\sum_{a\in\mathbf{Z}_\ell^*\bmod 1+\ell\mathbf{Z}_\ell}\big(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)v^{(1)}_{T,\ell}=v'_{T,\ell}$.)

37. Rappelons que ce sont les caractères associés à $\check\rho_T$ et pas ρ_T.

On en déduit le (i) en reprenant les calculs de la preuve de la prop. 15.3. Le (ii) se prouve en utilisant la relation $\mathrm{cor}_{M\ell}^{M}\psi_{S,M\ell} = \psi_{S,M}$, qui repose sur l'identité

$$\sum_{a\in 1+\ell^n\mathbf{Z}_\ell \bmod 1+\ell^{n+1}\mathbf{Z}_\ell} \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) v_{T,\ell}^{(n+1)} = v_{T,\ell}^{(n)}, \quad \text{si } n \geq 1. \quad \square$$

Remarque 15.8. — On déduit de (15.6) des relations analogues entre les $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw},M}^{S}(\rho_{T_0})_p$ et entre les $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw},M}^{S}(\rho_T)_p$.

15.3. Modules d'Iwasawa locaux

Soit A une $\mathbf{Z}_p$-algèbre locale complète (comme $\mathscr{O}_L$ ou T_0) et V une A-représentation de $G_{\mathbf{Q},S}$ (comme ρ_x ou ρ_{T_0}). On va s'intéresser à la structure des modules $H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda\widehat{\otimes}V)$, pour $\ell \in S$.

15.3.1. Le cas $\ell \neq p$. — Dans le cas $\ell \neq p$, on a le résultat suivant (I_ℓ est le sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbf{Q}_\ell}$) :

Lemme 15.9. — (i) $H^1(I_\ell, \Lambda\widehat{\otimes}V)^{\sigma_\ell=1} = 0$

(ii) $H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda\widehat{\otimes}V) \cong (\Lambda\widehat{\otimes}V^{I_\ell})/(\sigma_\ell - 1)$. *En particulier, $H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda\widehat{\otimes}V)$ est un $(\Lambda\widehat{\otimes}A)$-module de torsion.*

Démonstration. — Comme I_ℓ agit trivialement sur Λ, on a $(\Lambda\widehat{\otimes}V)^{I_\ell} = \Lambda\widehat{\otimes}V^{I_\ell}$ et $H^1(I_\ell, \Lambda\widehat{\otimes}V) = \Lambda\widehat{\otimes}H^1(I_\ell, V)$. La suite d'inflation-restriction fournit donc une suite exacte

$$0 \to H^1(\sigma_\ell^{\widehat{\mathbf{Z}}}, \Lambda\widehat{\otimes}V^{I_\ell}) \to H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda\widehat{\otimes}V) \to H^1(I_\ell, \Lambda\widehat{\otimes}V)^{\sigma_\ell=1},$$

et le (ii) est une conséquence du (i).

Pour prouver le (i), posons $M = H^1(I_\ell, V)$, et notons $M^\vee$ le dual de Pontryagin de M. Alors $H^1(I_\ell, \Lambda\widehat{\otimes}V)^{\sigma_\ell=1}$ est le dual de Pontryagin de $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*, M^\vee)/(\sigma_\ell - 1)$. Ce dernier module est nul car il est aussi égal à $H^1(\Gamma_\ell, \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*, M^\vee))$, où Γ_ℓ est l'image de $\sigma_\ell^{\widehat{\mathbf{Z}}}$ dans $\mathbf{Z}_p^*$, et $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*, M^\vee)$ est la somme directe d'un nombre fini de copies de l'induite de $\{1\}$ à Γ_ℓ de $M^\vee$.

Ceci permet de conclure. $\square$

15.3.2. Le cas $\ell = p$. — Dans le cas $\ell = p$, on utilise la théorie des (φ, Γ)-modules. D'après [**10, 20**], on a un isomorphisme naturel

$$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\widehat{\otimes}V) \cong D(V)^{\psi=1}$$

Si on note $\mathscr{C}(V)$ le module $(\varphi - 1)\cdot D(V)^{\psi=1}$, on a une suite exacte

$$0 \to D(V)^{\varphi=1} \to D(V)^{\psi=1} \to \mathscr{C}(V) \to 0. \tag{15.10}$$

Théorème 15.11. — *Le foncteur $V \mapsto \mathscr{C}(V)$ est exact.*

Démonstration. — Il résulte de [**12**, prop. VI.1.2] que l'on a un isomorphisme
$$\mathscr{C}(V) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathscr{C}(V^\vee(1)), \Lambda[\tfrac{1}{p}]/\Lambda).$$
Par ailleurs, si $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ est une suite exacte de représentations de $G_{\mathbf{Q}_p}$, on a des suites exactes
$$0 \to D(V_1)^{\psi=1} \to D(V)^{\psi=1} \to D(V_2)^{\psi=1},$$
$$0 \to D(V_2^\vee(1))^{\psi=1} \to D(V^\vee(1))^{\psi=1} \to D(V_1^\vee(1))^{\psi=1},$$
dont on déduit des suites exactes
$$0 \to \mathscr{C}(V_1) \to \mathscr{C}(V) \to \mathscr{C}(V_2), \quad 0 \to \mathscr{C}(V_2^\vee(1)) \to \mathscr{C}(V^\vee(1)) \to \mathscr{C}(V_1^\vee(1)).$$
Maintenant, $D(V_1)$ et $D(V_2^\vee(1))$ sont orthogonaux ; il en est donc de même de $\mathscr{C}(V_1)$ et $\mathscr{C}(V_2^\vee)$ (cf. la formule définissant l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Iw}}$, [**12**, prop. VI.1.2]). Comme $\mathscr{C}(V)$ et $\mathscr{C}(V^\vee(1))$ sont en dualité, on en déduit que $\mathscr{C}(V)$ se surjecte sur le dual de $\mathscr{C}(V_2^\vee(1))$, c'est-à-dire sur $\mathscr{C}(V_2)$, ce que l'on voulait prouver. □

Proposition 15.12. — *Si A est une $\mathbf{Z}_p$-algèbre locale et complète de corps résiduel fini, et si V est une A-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de rang d, on a une suite exacte*
$$0 \to H^0(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}, V) \to H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\widehat{\otimes} V) \to \mathscr{C}(V) \to 0,$$
et $\mathscr{C}(V)$ est un $\Lambda\widehat{\otimes}A$-module libre de rang d tandis que $H^0(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}, V)$ est un $\Lambda\widehat{\otimes}A$-module de torsion.

Démonstration. — La suite exacte est une traduction de la suite (15.10). Que $H^0(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}, V)$ soit de torsion est immédiat. Il reste donc à prouver que $\mathscr{C}(V)$ est libre. Posons $B = \Lambda\widehat{\otimes}A$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; par hypothèse, $A/\mathfrak{m}$ est un corps fini $\mathbf{F}_q$. Soit $\overline{V} = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A V$, de telle sorte que $\overline{V}$ est une représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$, de rang d sur $\mathbf{F}_q$ et donc $\mathscr{C}(\overline{V})$ est libre de rang d sur $\mathbf{F}_q \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$. Relevons une base de $\mathscr{C}(\overline{V})$ sur $\mathbf{F}_q \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$ en une famille d'éléments de $e_1, \dots, e_d$ de $\mathscr{C}(V)$ (c'est possible puisque le foncteur $\mathscr{C}$ est exact). Si $k \geq 1$, on a une suite exacte
$$0 \to (\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}) \otimes_{\mathbf{F}_q} \overline{V} \to (A/\mathfrak{m}^{k+1}) \otimes_A V \to (A/\mathfrak{m}^k) \otimes_A V \to 0.$$
On en déduit (par exactitude de $\mathscr{C}$) que la seconde ligne du diagramme commutatif suivant est exacte
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}} e_1 \oplus \cdots \oplus \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}} e_d \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \frac{B}{\mathfrak{m}^{k+1}} e_1 \oplus \cdots \oplus \frac{B}{\mathfrak{m}^{k+1}} e_d \arrow[r] \arrow[d] & \frac{B}{\mathfrak{m}^k} e_1 \oplus \cdots \oplus \frac{B}{\mathfrak{m}^k} e_d \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}} \otimes_{\mathbf{F}_q} \mathscr{C}(\overline{V}) \arrow[r] & \mathscr{C}(\frac{A}{\mathfrak{m}^{k+1}} \otimes_A V) \arrow[r] & \mathscr{C}(\frac{A}{\mathfrak{m}^k} \otimes_A V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
ce qui permet de prouver, par récurrence sur k, que $e_1, \dots, e_d$ est une base de $\mathscr{C}((A/\mathfrak{m}^k) \otimes_A V)$ sur $B/\mathfrak{m}^k$ (l'isomorphisme vertical de gauche correspond au cas $k = 1$, et celui de droite est l'hypothèse de récurrence). Un passage à la limite permet de conclure. □

Corollaire 15.13. — *$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_0})$ est un T-module libre de rang 2.*

Démonstration. — Cela résulte de ce que $H^0(G_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})}, \rho_{T_0}) = 0$. □

15.4. Théorie d'Iwasawa globale

Le contenu de ce § peut, essentiellement, se trouver dans [**55**, § 1.3].

15.4.1. Suites exactes de Poitou-Tate et de localisation. — On fixe un générateur topologique γ de $H_0 = 1 + p\mathbf{Z}_p$ et, si $n \geq 1$, on pose $\gamma_n = \gamma^{p^n}$.

Soit V un $\mathbf{Z}_p$-module compact muni d'une action continue de $G_{\mathbf{Q},S}$. Si $i \in \mathbf{N}$, on pose

$$\begin{aligned} &H^i_{\mathrm{Iw},S}(V) = H^i(G_{\mathbf{Q},S}, \Lambda_0\widehat{\otimes}V),\\ &X^i_{\mathrm{Iw},S}(V) = H^i(G_{\mathbf{Q},S}, \mathscr{C}(H_0, V^\vee(1)))^\vee = H^i(G_{\mathbf{Q}_\infty,S}, V^\vee(1))^\vee, \end{aligned}$$

où $M \mapsto M^\vee$ est la dualité de Pontryagin. On a $H^i_{\mathrm{Iw},S}(V) = 0$ si $i \neq 1, 2$ et $X^i_{\mathrm{Iw},S}(V) = 0$ si $i \neq 0, 1, 2$. Par ailleurs, on dispose de la suite exacte de Poitou-Tate [38]

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^2_{\mathrm{Iw},S}(V) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Iw},S}(V) \arrow[r] & \bigoplus_{\ell\in S} H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0\widehat{\otimes}V) \arrow[r] & X^1_{\mathrm{Iw},S}(V) \arrow[dll] \\ & & H^2_{\mathrm{Iw},S}(V) \arrow[r] & \bigoplus_{\ell\in S} H^2(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0\widehat{\otimes}V) \arrow[r] & X^0_{\mathrm{Iw},S}(V) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Remarque 15.14. — $H^1_{\mathrm{Iw},S}(V)$ et $\mathrm{Ker}\big[H^2_{\mathrm{Iw},S}(V) \to \oplus_{\ell\in S} H^2(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0\widehat{\otimes}V)\big]$ ne changent pas si on augmente S. En effet, si $M = \Lambda_0\widehat{\otimes}V$, on a une suite exacte longue de localisation (les H^0 sont nuls)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(G_{\mathbf{Q},S}, M) \arrow[r] & H^1(G_{\mathbf{Q},S'}, M) \arrow[r] & \bigoplus_{\ell\in S'\smallsetminus S} H^1(I_\ell, M)^{G_{\mathbf{F}_\ell}} \arrow[dll] \\ & H^2(G_{\mathbf{Q},S}, M) \arrow[r] & H^2(G_{\mathbf{Q},S'}, M) \arrow[r] & \bigoplus_{\ell\in S'\smallsetminus S} H^2(G_{\mathbf{Q}_\ell}, M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et $H^1(I_\ell, M)^{G_{\mathbf{F}_\ell}} = 0$ ((i) du lemme 15.9).

15.4.2. Le cas d'une représentation sur un corps fini. — On pose

$$\overline{\Lambda}_0 = \mathbf{F}_q \otimes_{\mathbf{F}_p} (\Lambda_0/p) = \mathbf{F}_q[[\gamma - 1]].$$

Supposons maintenant que V est de dimension finie d sur $\mathbf{F}_q$. Les $H^2(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0 \otimes V)$ sont des $\overline{\Lambda}_0$-modules de torsion, ainsi que les $H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0 \otimes V)$, pour $\ell \neq p$; par contre, $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda_0 \otimes V)$ est un $\overline{\Lambda}_0$-module de rang d.

Soit $\mathrm{Frob}_\infty \in G_{\mathbf{Q}}$ la conjugaison complexe. Posons $d^+ = \dim_{\mathbf{F}_q} V^{\mathrm{Frob}_\infty=1}$ et $d^- = \dim_{\mathbf{F}_q} V^{\mathrm{Frob}_\infty=-1}$. Les arguments habituels de caractéristique d'Euler-Poincaré fournissent les relations (comme S est fixé, on le supprime des $X^i_{\mathrm{Iw},S}$, etc.) :

(15.15) $\mathrm{rg}_{\overline{\Lambda}_0} H^1_{\mathrm{Iw}}(V) - \mathrm{rg}_{\overline{\Lambda}_0} H^2_{\mathrm{Iw}}(V) = d - d^+ = d^-, \quad \mathrm{rg}_{\overline{\Lambda}_0} X^1_{\mathrm{Iw}}(V) - \mathrm{rg}_{\overline{\Lambda}_0} X^2_{\mathrm{Iw}}(V) = d^+$

38. Elle ne comporte que 7 termes au lieu de 9 car les $H^0(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0\widehat{\otimes}V)$ sont nuls.

Lemme 15.16. — *Si V est absolument irréductible, $H^1_{\rm Iw}(V)$ est un $\overline{\Lambda}_0$-module libre.*

Démonstration. — On a des suites exactes et isomorphismes

$$0\to H^1_{\rm Iw}(V)/(\gamma-1)\to H^1(V)\to H^2_{\rm Iw}(V)[\gamma-1]\to 0,\quad H^2_{\rm Iw}(V)/(\gamma-1)\cong H^2(V).$$

Posons $k={\rm rg}_{\overline{\Lambda}_0}H^2_{\rm Iw}(V)$, et donc $H^2_{\rm Iw}(V)=\overline{\Lambda}_0^k\oplus Z$, où Z est un $\overline{\Lambda}_0$-module de torsion. Alors

$$\dim_{\mathbf{F}_q}H^2_{\rm Iw}(V)[\gamma-1]=\dim_{\mathbf{F}_q}Z[\gamma-1]=\dim_{\mathbf{F}_q}Z/(\gamma-1)=-k+\dim_{\mathbf{F}_q}H^2_{\rm Iw}(V)/(\gamma-1).$$

Comme $H^0(V)=0$ par hypothèse, la formule d'Euler-Poincaré

$$\dim_{\mathbf{F}_q}H^1(V)-\dim_{\mathbf{F}_q}H^0(V)-\dim_{\mathbf{F}_q}H^2(V)=\dim_{\mathbf{F}_q}V-\dim_{\mathbf{F}_q}V^{{\rm Frob}_\infty=1}=d^-$$

implique que $\dim_{\mathbf{F}_q}H^1_{\rm Iw}(V)/(\gamma-1)=k+d^-$, et comme ${\rm rg}_{\overline{\Lambda}_0}H^1_{\rm Iw}(V)=k+d^-$, cela implique que $H^1_{\rm Iw}(V)$ est libre, ce que l'on voulait prouver. □

Lemme 15.17. — *Si V est absolument irréductible, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $H^2_{\rm Iw}(V)$ *est un $\overline{\Lambda}_0$-module de torsion.*
(ii) $H^1_{\rm Iw}(V)$ *est un $\overline{\Lambda}_0$-module libre de rang d^-.*
(iii) $X^1_{\rm Iw}(V^\vee(1))$ *est un $\overline{\Lambda}_0$-module de rang d^+* (pas nécessairement libre).
(iv) $X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))$ *est un $\overline{\Lambda}_0$-module de torsion.*
(v) $X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))=0$.

Démonstration. — Le lemme 15.16 permet de prouver que (iv)⇔(v) puisque $X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))$ s'injecte dans un module libre.

Les relations (15.15) montrent que (i)⇔(ii) et (pour $\rho^\vee(1)$) que (iii)⇔(iv).

Pour conclure, il suffit donc de prouver que (i) équivaut à ce que $X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))$ soit de $\overline{\Lambda}_0$-torsion. Or la suite exacte

$$0\to\mathscr{C}(H_0/H_0^{p^n},V)\to\mathscr{C}(H_0,V)\xrightarrow{\gamma_n-1}\mathscr{C}(H_0,V)\to 0$$

fournit, par passage à la cohomologie de $G_{\mathbf{Q},S}$ et au $\mathbf{F}_q$-dual, la suite exacte

$$0\to X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))/(\gamma_n-1)\to H^2(G_{\mathbf{Q},S},\mathscr{C}(H_0/H_0^{p^n},V))^\vee\to X^1_{\rm Iw}(V^\vee(1))^{\gamma_n=1}\to 0.$$

Comme $\mathscr{C}(H_0/H_0^{p^n},V)\cong\mathbf{Z}_p[H_0/H_0^{p^n}]\otimes V$, en tant que $G_{\mathbf{Q},S}$-module, et comme $H^2_{\rm Iw}(V)/(\gamma_n-1)\cong H^2(G_{\mathbf{Q},S},\mathbf{Z}_p[H_0/H_0^{p^n}]\otimes V)$ puisque $H^3(G_{\mathbf{Q},S},-)=0$, on a

$$\dim_{\mathbf{F}_q}H^2(G_{\mathbf{Q},S},\mathscr{C}(H_0/H_0^{p^n},V))^\vee=\dim_{\mathbf{F}_q}H^2_{\rm Iw}(V)/(\gamma_n-1).$$

Par ailleurs, $X^1_{\rm Iw}(V^\vee(1))^{\gamma_n=1}$ se stabilise puisque $X^1_{\rm Iw}(V^\vee(1))$ est de type fini sur $\overline{\Lambda}_0$. Comme un $\overline{\Lambda}_0$-module M est de torsion si et seulement si $\dim_{\mathbf{F}_q}M/(\gamma_n-1)$ est majorée indépendamment de n, on voit que les conditions suivantes sont équivalentes :

- $X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))$ est de $\overline{\Lambda}_0$-torsion,
- $\dim_{\mathbf{F}_q}(X^2_{\rm Iw}(V^\vee(1))/(\gamma_n-1))$ est majorée,
- $\dim_{\mathbf{F}_q}(H^2(G_{\mathbf{Q},S},\mathscr{C}(H_0/H_0^{p^n},V))^\vee)$ est majorée

• $\dim_{\mathbf{F}_q} H^2_{\mathrm{Iw}}(V)/(\gamma_n - 1)$ est majorée,
• $H^2_{\mathrm{Iw}}(V)$ est de $\overline{\Lambda}_0$-torsion.

Ceci permet de conclure. □

15.5. Théorie d'Iwasawa de ρ_{T_0}

15.5.1. La condition $\mu = 0$. — On va appliquer ce qui précède à $V = \rho_{T_0}$ et ses quotients. Nous aurons besoin de manière intensive du résultat fondamental suivant de Kato [**42**, th. 12.4] (Perrin-Riou [**55**, prop. 1.3.2] a prouvé que les quatre propriétés sont essentiellement équivalentes et conjecturé – sous le nom de « conjecture de Leopoldt faible » – qu'elles sont satisfaites) :

Théorème 15.18. — (Kato) *Si x est classique, alors :*
• $X^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x) = 0$,
• $H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ *est un Λ_0-module sans torsion, libre de rang* 1 *si on inverse p* (et même sans inverser p si $p \neq 2$), *et si $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible.*
• $H^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ *est un Λ_0-module de torsion,*
• $X^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ *est de rang* 1 *sur* Λ_0 (mais peut avoir de la torsion).

Lemme 15.19. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *Il existe x classique tel que l'invariant μ du Λ_0-module de torsion $H^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ soit nul.*
(ii) $H^2_{\mathrm{Iw}}(\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})$ *est un $\overline{\Lambda}_0$-module de torsion.*

Démonstration. — Cela résulte de la nullité de $H^3_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ qui fournit un isomorphisme $H^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)/\varpi_x \cong H^2_{\mathrm{Iw}}(\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})$, où ϖ_x est une uniformisante de $T_0/\mathfrak{p}_x$. (Comme $H^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ est de torsion sur Λ_0, la nullité de son invariant μ équivaut à ce que $H^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)/\varpi_x$ soit de torsion sur $\overline{\Lambda}_0$). □

On dit que ρ_{T_0} *vérifie* $\mu = 0$ si $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est absolument irréductible et si $H^2_{\mathrm{Iw}}(\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})$ est un $\overline{\Lambda}_0$-module de torsion (et donc $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ vérifie les conditions équivalentes du lemme 15.17).

15.5.2. La localisation en p

Proposition 15.20. — *L'application de localisation*

$$\mathrm{loc}_p : H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0}) \to H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda_0 \widehat{\otimes} \rho_{T_0})$$

est injective.

Démonstration. — Soit z dans le noyau M de cette application. Si $x \in X = \mathscr{X}_0^{\mathrm{cl}}$, soit z_x l'image de z dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$. Alors $\mathrm{loc}_p(z_x) = 0$, et z_x appartient au noyau M_x de loc_p. Or $H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$ est un Λ_0-module sans torsion (th. 15.18) et donc M_x est aussi sans Λ_0-torsion. Comme $X^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_x) = 0$ (th. 15.18), la suite exacte de Poitou-Tate fournit une injection de M_x dans $\oplus_{\ell \in S \setminus \{p\}} H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0 \widehat{\otimes} \rho_{T_0})$ qui est un Λ_0-module de torsion. On en déduit que $M_x = 0$ et donc $z_x = 0$. Comme ρ_{T_0} s'injecte dans $\prod_{x \in X} \rho_x$ puisque T_0 s'injecte dans $\prod_{x \in X} \mathfrak{p}_x$ par zariski-densité de X, et comme les H^0_{Iw} sont nuls, il s'ensuit que M s'injecte dans $\prod_{x\in X} M_x$, et donc $M=0$, ce que l'on voulait démontrer. $\square$

Corollaire 15.21. — *$X^2_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})=0$.*

Démonstration. — Cela résulte de la suite exacte de Poitou-Tate. $\square$

15.6. Globalisation : le cas $\mu=0$

On suppose dans ce paragraphe que l'on est dans le cas $\mu=0$, et donc $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ vérifie les conditions équivalentes du lemme 15.17.

Lemme 15.22. — *Si $V=\rho_{T_0}$, $\prod_{x\in X}\rho_x$ ou $\big(\prod_{x\in X}\rho_x\big)/\rho_{T_0}$, alors $X^2_{\mathrm{Iw}}(V)=0$.*

Démonstration. — Dans tous les cas, V est un $\mathbf{Z}_p$-module compact (le dernier comme quotient de modules compacts) et donc $V^\vee$ est discret et tous ses composants de Jordan-Hölder sont isomorphes à $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$. Comme on est dans le cas $\mu=0$, on a $X^2_{\mathrm{Iw}}(\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})=0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Lemme 15.23. — *Si $c_p\in H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda_0\widehat{\otimes}\rho_{T_0})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe $c\in H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})$, unique, tel que c_p soit l'image de c par l'application de localisation.*

(ii) *Il existe $\mathscr{X}'$ zariski-dense dans la fibre générique de $\mathscr{X}_0$, tel que l'image $c_{p,x}$ de c_p dans $H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda_0\otimes\rho_x)$ soit dans l'image de la localisation $H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)\to H^1(G_{\mathbf{Q}_p},\Lambda_0\otimes\rho_x)$, pour tout $x\in\mathscr{X}'$.*

Démonstration. — Il n'y a que (ii)$\Rightarrow$(i) à prouver. L'unicité de c est une conséquence de la prop. 15.20 ; prouvons l'existence. Soit Z le conoyau de $\rho_{T_0}\to\prod_{x\in\mathscr{X}'}\rho_x$. On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0}) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{\ell\in S}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\Lambda_0\widehat{\otimes}\rho_{T_0}) \arrow[r] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Iw}}(\prod_x\rho_x) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{\ell\in S}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\Lambda_0\widehat{\otimes}\prod_x\rho_x) \arrow[r] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{Iw}}(\prod_x\rho_x) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Iw}}(Z) \arrow[r] & \oplus_{\ell\in S}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\Lambda_0\widehat{\otimes}Z) \arrow[r] & X^1_{\mathrm{Iw}}(Z)
\end{tikzcd}$$

Les 0 à gauche proviennent de la nullité des X^2_{Iw} des termes considérés (cf. lemme 15.22) ; ceux du haut proviennent de la nullité des H^0_{Iw}.

L'hypothèse implique que, pour tout $x\in\mathscr{X}'$, il existe $(c_{\ell,x})_{\ell\in S\setminus\{p\}}$, tel que $\sum_{\ell\in S}c_{\ell,x}=0$ dans $X^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$. Maintenant, Z est un Λ-module compact qui admet une filtration par des sous-Λ-modules compacts Z_n tels que $Z_n/Z_{n+1}\cong\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, pour tout n, et $Z=\varprojlim_n(Z/Z_n)$. L'image de $((c_{\ell,x})_{\ell\in S})_x$ dans $\oplus_{\ell\in S}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\Lambda_0\widehat{\otimes}Z)$

a pour image 0 dans $X^1_{\mathrm{Iw}}(Z)$ et, par construction, tombe dans le sous-groupe $\oplus_{\ell\in S\setminus\{p\}}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\Lambda_0\widehat{\otimes}Z)$. La première propriété implique que cette image provient d'un élément y de $H^1_{\mathrm{Iw}}(Z)$. Pour conclure, il suffit de prouver que $y=0$ et, pour cela il suffit de prouver que l'image y_n de y dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(Z/Z_n)$ est nulle pour tout n, ce qui se fait par récurrence sur n en utilisant la suite exacte $0\to\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}\to Z/Z_{n+1}\to Z/Z_n\to 0$: l'hypothèse de récurrence implique que y_{n+1} appartient au sous-groupe $H^1_{\mathrm{Iw}}(\overline{\Lambda}\otimes\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})$ de $H^1_{\mathrm{Iw}}(Z/Z_{n+1})$ (les H^0_{Iw} sont nuls), qui est libre sur $\overline{\Lambda}_0$, et son image par l'injection $H^1_{\mathrm{Iw}}(\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})\to\oplus_{\ell\in S}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\overline{\Lambda}_0\otimes\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})$ tombe dans le sous-groupe $\oplus_{\ell\in S\setminus\{p\}}H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell},\overline{\Lambda}_0\otimes\overline{\rho}_{\mathfrak{m}})$ qui est de $\overline{\Lambda}_0$-torsion. □

Ce qui précède s'applique aux éléments $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})_p$ et $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})_p$. Pour mettre le résultat sous une forme plus standard, notons que le lemme de Shapiro fournit un isomorphisme

$$H^1(G_{\mathbf{Q},S_M},\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_{0,M}})=H^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M),S_M},\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_0}). \tag{15.24}$$

Théorème 15.25. — (i) *Si $\rho_{T_0}\otimes\eta$ vérifie $\mu=0$ pour tout caractère η de* $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)/\mathbf{Q})$, *alors il existe*

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})\in\rho^\diamond_{T_0}\otimes_{T_0}H^1(G_{\mathbf{Q},S},\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_0}),$$

unique, dont l'image par la localisation soit $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})_p$.

(ii) *Plus généralement, si* $(M,pN)=1$, *et si* $\rho_{T_0}\otimes\eta$ *vérifie* $\mu=0$ *pour tout caractère* η *de* $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Mp})/\mathbf{Q})$, *alors il existe*

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})\in\rho^\diamond_{T_0}\otimes_{T_0}H^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M),S_M},\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_0}),$$

unique, dont l'image par la localisation soit $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})_p$.

(iii) *Les* $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0})$ *vérifient les relations de systèmes d'Euler :*

- *Si* $\ell\nmid pNM$, *alors*

$$\mathrm{cor}^M_{M\ell}\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M\ell}(\rho_{T_0})=P_{\ell,M}([\sigma_\ell^{-1}])\cdot\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0}),$$

où l'on a posé

$$P_{\ell,M}(X)=\big(1-(\chi_{\ell,1,M}(\ell)+\chi_{\ell,2,M}(\ell))X+(\chi_{\ell,1,M}(\ell)\chi_{\ell,2,M}(\ell))X^2\big).$$

- *Si* $\ell\mid M$, *alors*

$$\mathrm{cor}^M_{M\ell}\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M\ell}(\rho_{T_0})=\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_{T_0}).$$

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont une conséquence de la zariski-densité des points classiques, de la prop. 15.3 et du lemme 15.23 (pour tous les $\rho_{T_0}\otimes\eta$ pertinents) ; le groupe qui apparaît naturellement dans le (ii) est $\rho^\diamond_{T_0}\otimes_{T_0}H^1(G_{\mathbf{Q},S_M},\Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_{0,M}})$ et on utilise l'isomorphisme (15.24) pour le remplacer par le groupe de l'énoncé.

Le (iii) est une traduction de la prop. 15.7. □

Remarque 15.26. — (i) On note

$$\mathbf{z}_M^S(\rho_T) \in \rho_T^\diamond \otimes H^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M),S_M}, \rho_T)$$

l'élément correspondant à $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw},M}^S(\rho_{T_0})$ via l'identification $\rho_T = \Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_0}$. Les $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)$ forment un système d'Euler pour ρ_T.

(ii) L'existence d'un tel système d'Euler permet d'utiliser les dérivées de Kolyvagin [**44, 56, 41, 60**] pour étudier le groupe $H^2(G_{\mathbf{Q},S}, \check{\rho}_T)$.

(iii) Vérifier que $\mu = 0$ pour tous les tordus par des caractères peut être un peu compliqué. Pour les applications des systèmes d'Euler, seul le p-quotient maximal $(\mathbf{Z}/M)_p^*$ de $(\mathbf{Z}/M)^*$ joue un rôle (on peut remplacer les éléments initiaux par les corestrictions idoines), et les facteurs de Jordan-Hölder de $\mathbf{Z}_p[(\mathbf{Z}/M)_p^*] \otimes \Lambda\widehat{\otimes}\rho_{T_0}$ sont tous isomorphes à $\overline{\Lambda} \otimes \overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$, ce qui fait qu'on a juste besoin de $\mu = 0$ pour $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$.

15.7. Globalisation : le cas général

On ne suppose plus que l'on est dans le cas $\mu = 0$, mais on suppose toujours que l'on est dans les conditions du th. 13.11 et, en particulier, que $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ est irréductible (et comme $p \neq 2$, cela implique que la restriction de $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ à $G_{\mathbf{Q}_\infty}$ est aussi irréductible).

15.7.1. La tour des $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw},M}^S(\rho_{T_0})$

Lemme 15.27. — *Si $x \in \mathscr{X}_0(\mathscr{O}_L)$, l'application naturelle $X_{\mathrm{Iw}}^1(\rho_{T_0})/\mathfrak{p}_x \to X_{\mathrm{Iw}}^1(\rho_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — On note simplement $H^i(W)$ le groupe $H^i(G_{\mathbf{Q}_\infty,S}, W)$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ engendrant $\mathfrak{p}_x$ comme T_0-module. Si $1 \leq n \leq r$, la multiplication par a_n induit une suite exacte $0 \to \rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_n] \to \rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_{n-1}] \xrightarrow{a_n} X \to 0$, où X est un sous-T_0-module de $\rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_{n-1}]$. L'hypothèse $\overline{\rho}_{\mathfrak{m}}$ irréductible implique que les H^0 sont nuls. Il en résulte que $H^1(X) \to H^1(\rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_{n-1}])$ est injective et que $H^1(\rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_n]) = H^1(\rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_{n-1}])[a_n]$. Par récurrence, cela prouve que $H^1(\rho_{T_0}^\vee[a_1, \ldots, a_n]) = H^1(\rho_{T_0}^\vee)[a_1, \ldots, a_n]$. Pour $n = r$, cela fournit, par dualité de Pontryagin, le résultat voulu. □

Proposition 15.28. — *Il existe $\alpha \in \Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0$, non diviseur de 0, tel que la composante sur $\eta = 1$ de $\alpha\,\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$ soit dans l'image de $\rho_{T_0}^\diamond \otimes_{T_0} H_{\mathrm{Iw}}^1(\rho_{T_0})$ par l'application de localisation.*

Démonstration. — Soient

$$W_x = \rho_x^*\otimes\big(X_{\mathrm{Iw}}^1(\rho_x)/\oplus_{\ell\in S\setminus\{p\}} H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0 \otimes \rho_x)\big)$$
$$W = \rho_{T_0}^\diamond\otimes_{T_0}\big(X_{\mathrm{Iw}}^1(\rho_{T_0})/\oplus_{\ell\in S\setminus\{p\}} H^1(G_{\mathbf{Q}_\ell}, \Lambda_0 \otimes \rho_{T_0})\big)$$

Si $x \in \mathscr{X}_0^{\mathrm{cl},+}$, l'image de la composante sur $\eta = 1$ de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$ dans W_x est nulle d'après la définition de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$, le th. 14.18 et la suite exacte de Poitou-Tate. On en déduit, en utilisant le lemme 15.27, que l'image de la composante sur $\eta = 1$ de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$ dans W appartient à $\mathfrak{p}_xW$.

Comme W est de type fini sur $\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0$, il existe $\alpha\in\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0$, non diviseur de 0, tel que α tue le sous-module de torsion de W, et donc $\alpha W\subset W$ est sans $\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0$ torsion. Mais alors l'image de $\alpha\,\mathbf{z}_{\rm Iw}^S(\rho_{T_0})_p$ appartient à $\mathfrak{p}_x\alpha W$, pour tout $x\in\mathscr{X}_0^{\rm cl,+}$, et comme $\mathscr{X}_0^{\rm cl,+}$ est zariski-dense dans $\mathscr{X}_0$, on en déduit que cette image est nulle (on peut injecter αW dans $(\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0)^d$ et $\cap_x\mathfrak{p}_x\Lambda_0\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}T_0=0$ car $\cap_x\mathfrak{p}_xT_0=0$ puisque $\mathscr{X}_0^{\rm cl,+}$ est zariski-dense dans $\mathscr{X}_0$). La suite exacte de Poitou-Tate permet d'en déduire que $\alpha\,\mathbf{z}_{\rm Iw}^S(\rho_{T_0})_p$ est la localisation d'un élément de $\rho_{T_0}^\diamond\otimes_{T_0}H^1_{\rm Iw}(\rho_{T_0})$. □

Remarque 15.29. — (i) La prop. 15.28 pour ρ_{T_0} et ses tordues par des caractères de $(\mathbf{Z}/p)^*$ permet de définir

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{\rm Iw}^S(\rho_{T_0})&\in{\rm Fr}(T)\otimes_T\big(\rho_{T_0}^\diamond\otimes_{T_0}H^1(G_{\mathbf{Q},S},\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_0})\big)\\ \mathbf{z}^S(\rho_T)&\in{\rm Fr}(T)\otimes_T\big(\rho_T^\diamond\otimes_TH^1(G_{\mathbf{Q},S},\rho_T)\big)\end{aligned}$$

le premier comme l'unique (cor. 15.21) élément ayant pour image $\mathbf{z}_{\rm Iw}^S(\rho_{T_0})_p$ par l'application de localisation, le second par l'isomorphisme habituel.

(ii) Plus généralement, on peut définir, si $(M,pN)=1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{{\rm Iw},M}^S(\rho_{T_0})&\in{\rm Fr}(T)\otimes_T\big(\rho_{T_0}^\diamond\otimes_{T_0}H^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M),S_M},\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_0})\big)\\ \mathbf{z}_M^S(\rho_T)&\in{\rm Fr}(T)\otimes_T\big(\rho_T^\diamond\otimes_TH^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M),S_M},\rho_T)\big)\end{aligned}$$

Les $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)$ vérifient les relations de systèmes d'Euler du th. 15.25 mais l'introduction des dénominateurs dans leur définition rend délicate l'utilisation de la méthode des systèmes d'Euler.

(iii) L'exemple suivant montre qu'il est difficile de se débarrasser de ces dénominateurs en n'utilisant que la zariski-densité des points classiques. Soit $T_0=\mathbf{Z}_p[[x,y]]$ et donc $T=\mathbf{Z}_p[[x,y,z]]$. Soit $X=p\mathbf{Z}_p^*\times p\mathbf{Z}_p^*$: c'est un sous-ensemble zariski-dense de ${\rm Spec}\,T_0$; si $a,b\in\mathbf{Z}_p^*$, on note $\mathfrak{p}_{(a,b)}$ l'idéal $(x-pa,y-pb)$ de T_0 correspondant à $(pa,pb)\in X$. Enfin, soit $M=T/(zx-y)$. Alors

$$M/\mathfrak{p}_{(a,b)}M=\mathbf{Z}_p[[x,z]]/(x-pa,xz-pb)=\mathbf{Z}_p[[z]]/(paz-pb)=\mathbf{F}_p[[z]]$$

car $b-az$ est une unité de $\mathbf{Z}_p[[z]]$. On en déduit que $\mathfrak{p}_{(a,b)}M\supset pM$, pour tout (a,b).

(iv) Nous prouverons (th. 17.10) que $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)\in\rho_T^\diamond\otimes_TH^1(G_{\mathbf{Q},S_M},\rho_T)$, et donc qu'il n'y a pas de dénominateurs.

15.7.2. Comparaison entre $\mathbf{z}(\pi)$ *et* $(0,\infty)$ *: suite et fin.* — Le résultat suivant, allié à l'invariance de $(0,\infty)$ par multiplication par un caractère (pour passer de $\mathscr{X}$ à $\mathscr{X}_0$) permet (cf. rem. 14.19 et prop. 15.3) d'étendre le th. 14.18 au cas général (i.e. sans supposer que $m_{\rm \acute{e}t}(\pi)_p$ est absolument irréductible).

Proposition 15.30. — *Si $x\in\mathscr{X}_0^{\rm cl}$, il existe $z\in\rho_x^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},\Lambda\otimes\rho_x)$ et $\alpha_x\in\Lambda$, non diviseur de* 0*, tels que* ${\rm loc}_p(z)=\alpha_x\,\mathbf{z}_{\rm Iw}^S(\rho_x)_p$.

Démonstration. — On accouple avec un élément générique de ρ_T pour ne pas traîner des $\rho_T^\diamond$ ou ρ_x^* dans la preuve, et on fixe un caractère de $(\mathbf{Z}/p)^*$ pour travailler avec Λ_0 plutôt que Λ et pouvoir utiliser la prop. 15.28 (le résultat s'en déduit en faisant la somme sur tous les η).

On sait qu'il existe $\alpha \in \Lambda_0 \widehat{\otimes} T_0$, non diviseur de 0, tel que $\alpha\, \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$ soit dans l'image de loc_p. Le problème est que α pourrait fort bien être un diviseur de 0 sur $\{x\} \times \mathscr{W}_0$. Par contre, x étant classique, est un point lisse de $\mathscr{X}_0$ et est un zéro isolé de α sur toute courbe suffisamment générique passant par x.

Soit donc $R = T_0/I$ un quotient de T_0, avec $\alpha \notin I$, $I \subset \mathfrak{p}_x$, et $\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{p}])$ de dimension 1. Notons $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_R)_p$ l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$ par spécialisation.

Quitte à localiser, on peut supposer que R contient un élément f dont le diviseur est (x) et il suffit de prouver que, si α s'annule en x, alors $f^{-1}\alpha\, \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_R)_p$ est encore dans l'image de loc_p (par récurrence, cela permet de supposer que α n'est pas identiquement nul sur $\{x\} \times \mathscr{W}_0$ et on peut prendre pour $\alpha_x \in \Lambda$ la spécialisation de α à $\{x\} \times \mathscr{W}_0$). Soit $z_R \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_R)$ l'image de $z_{T_0} \in H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_{T_0})$ vérifiant $\mathrm{loc}_p(z_{T_0}) = \alpha\, \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_{T_0})_p$, et z_x son image dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x)$. Comme α s'annule en x, on a $\mathrm{loc}_p(z_x) = 0$, et donc $z_x = 0$ puisque $\mathrm{loc}_p : H^1_{\mathrm{Iw}}(\rho_x) \to H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \Lambda_0 \widehat{\otimes} \rho_x)$ est injective (cf. prop. 15.20).

Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle représentant z_R. D'après ce qui précède, il existe $c \in \Lambda_0 \otimes \rho_x$ tel que $c_\sigma(x) = (\sigma - 1)c$. Soit $\tilde{c}$ un relèvement de c dans $\Lambda \widehat{\otimes} \rho_R$. Alors, par construction, le 1-cocycle $c_\sigma - (\sigma - 1)\tilde{c}$ représente z_R et est divisible par f. Il s'ensuit que $f^{-1}\alpha\, \mathbf{z}_{\mathrm{Iw}}^S(\rho_R)_p$ est l'image de $f^{-1}(c_\sigma - (\sigma - 1)\tilde{c})$ et donc est dans l'image de loc_p. □

15.7.3. Le système d'Euler des $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)$. — En anticipant un peu (i.e., en utilisant le th. 17.10 pour ρ_T et les ρ_{T_M}), on obtient finalement le résultat suivant, si $\mathfrak{m}$ est générique.

Théorème 15.31. — (i) *Si $(M, Np) = 1$,*

$$\mathbf{z}_M^S(\rho_T) \in \rho_T^\diamond \otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M), S_M}, \rho_T).$$

(ii) *Les $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)$ vérifient les relations de systèmes d'Euler du th. 15.25.*

(iii) *Si $x \in \mathscr{X}$, et si $\mathbf{z}_M^S(\rho_x) \in \rho_x^* \otimes H^1(G_{\mathbf{Q}(\zeta_M), S_M}, \rho_x)$ est la spécialisation de $\mathbf{z}_M^S(\rho_T)$, alors $(\mathbf{z}_M^S(\rho_x))_M$ est un système d'Euler pour ρ_x.*

(iv) *Si $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl}}$, alors $(\mathbf{z}_M^S(\rho_x))_M$ est relié au système d'Euler de Kato par la relation suivante*[39] *pour $M = 1$*

$$\mathbf{z}^S(\rho_x) = \Big(\prod_{\ell \in S \setminus \{p\}} P_\ell(1)\Big) \cdot \mathbf{z}(\rho_x).$$

39. P_ℓ est le polynôme P_ℓ de la prop. 15.3. Comme σ_ℓ agit trivialement sur $H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_x)$, $P_\ell([\sigma_\ell^{-1}])$ agit par $P_\ell(1)$. On a aussi $P_\ell(1) = L_\ell(\check{\rho}_x, 0)^{-1}$ d'après la rem. 3.28

Remarque 15.32. — En posant

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_T) = \iota^{\mathrm{semi}}(\mathbf{z}^S_M(\rho_T)),$$

où $\iota^{\mathrm{semi}} : \rho_{T_M} \to \Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_{T_M}$ est l'application du n° 15.2.2, on obtient un système d'Euler $(\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_T))_M$ pour $\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_T$.

Si $x \in \mathscr{X}$, ce système d'Euler se spécialise en un système d'Euler $(\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw},M}(\rho_x))_M$ pour $\Lambda\widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p}\rho_x$. Si $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl}}$, ce système d'Euler redonne, à un facteur d'Euler près, le système d'Euler de Kato qui permet d'étudier la théorie d'Iwasawa de la forme modulaire associée à x.

16. Le système des éléments de Beilinson-Kato

Ce chapitre est un survol de la construction du système de Beilinson-Kato et de ses twists à la Soulé.

16.1. Séries d'Eisenstein-Kronecker

16.1.1. Définition. — Si $(\tau, z) \in \mathscr{H} \times \mathbf{C}$, on pose $q = e^{2i\pi\tau}$, $q_z = e^{2i\pi z}$ et on note ∂_z l'opérateur $\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z} = q_z\frac{\partial}{\partial q_z}$. On pose aussi $\mathbf{e}_\infty(a) = e^{-2i\pi a}$. Si $k \in \mathbf{N}$, $\tau \in \mathscr{H}$, $z, u \in \mathbf{C}$, la série d'Eisenstein-Kronecker

$$H_k(s,\tau,z,u) = \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k}\Big(\frac{\tau-\overline{\tau}}{2i\pi}\Big)^{s-k}\sum_{\omega\in\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau}\frac{\overline{\omega+z}^k}{|\omega+z|^{2s}}\mathbf{e}_\infty\Big(\frac{\omega\overline{u}-u\overline{\omega}}{\overline{\tau}-\tau}\Big),$$

qui converge [40] si $\mathrm{Re}(s) > 1+\frac{k}{2}$, possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors de pôles simples en $s = 1$ (si $k = 0$ et $u \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$) et $s = 0$ (si $k = 0$ et $z \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$) et vérifie l'équation fonctionnelle

$$H_k(s,\tau,z,u) = \mathbf{e}_\infty\Big(\frac{z\overline{u}-u\overline{z}}{\overline{\tau}-\tau}\Big)\cdot H_k(k+1-s,\tau,u,z).$$

On définit les fonctions E_k et F_k par les formules

$$E_k(\tau,z) = H_k(k,\tau,z,0) \quad \text{et} \quad F_k(\tau,z) = H_k(k,\tau,0,z).$$

On a

$$E_{k+1}(\tau,z) = \partial_z E_k(\tau,z) \quad \text{et} \quad E_0(\tau,z) = \log|\theta(\tau,z)|^2, \text{ si } z \notin \mathbf{Z}\tau+\mathbf{Z},$$

où $\theta(\tau,z)$ est donnée par le produit infini

$$\theta(\tau,z) = q^{1/12}(q_z^{1/2}-q_z^{-1/2})\prod_{n\geq 1}\big((1-q^nq_z)(1-q^nq_z^{-1})\big).$$

40. Si $z \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau$, on supprime le terme correspondant à $\omega = -z$ de la somme.

16.1.2. Les formes modulaires $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ et $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$. — Les fonctions $E_k(\tau,z)$ et $F_k(\tau,z)$ sont périodiques en z de période $\mathbf{Z}\tau+\mathbf{Z}$. Si $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2$ et si $(a,b)\in\mathbf{Q}^2$ a pour image (α,β) dans $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2$, on pose

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}=E_k(\tau,a\tau+b)\quad\text{et}\quad F^{(k)}_{\alpha,\beta}=F_k(\tau,a\tau+b).$$

Proposition 16.1. — (i) *$E^{(2)}_{0,0}=F^{(2)}_{0,0}=\frac{-1}{24}E_2^*$, où*

$$E_2^*=\tfrac{6}{i\pi(\tau-\overline{\tau})}+1-24\sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)q^n$$

est la série d'Eisenstein quasi-holomorphe de poids 2 habituelle.
(ii) *Si $N\alpha=N\beta=0$, alors*
 (a) *$E^{(2)}_{\alpha,\beta}-E^{(2)}_{0,0}\in M_2^{\rm cl}(\Gamma_N,\mathbf{Q}(\zeta_N))$ et $E^{(k)}_{\alpha,\beta}\in M_k^{\rm cl}(\Gamma(N),\mathbf{Q}(\zeta_N))$ si $k\geq 1$, $k\neq 2$.*
 (b) *$F^{(k)}_{\alpha,\beta}\in M_k^{\rm cl}(\Gamma(N),\mathbf{Q}(\zeta_N))$ si $k\geq 1$, $k\neq 2$ ou si $k=2$ et $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.*

On a les relations de distribution suivantes si e est un entier ≥ 1 :

$$\sum_{e\alpha'=\alpha,\,e\beta'=\beta}E^{(k)}_{\alpha',\beta'}=e^kE^{(k)}_{\alpha,\beta}\qquad\text{et}\qquad\sum_{e\alpha'=\alpha,\,e\beta'=\beta}F^{(k)}_{\alpha',\beta'}=e^{2-k}F^{(k)}_{\alpha,\beta}$$
$$\sum_{e\beta'=\beta}E^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{e})=e^kE^{(k)}_{\alpha,\beta}\qquad\text{et}\qquad\sum_{e\beta'=\beta}F^{(k)}_{\alpha,\beta'}(\frac{\tau}{e})=e\,F^{(k)}_{\alpha,\beta}.$$

Ces relations de distribution peuvent se condenser agréablement en l'énoncé suivant :

Théorème 16.2. — *Si $k\geq 1$, il existe*

$$\mathbf{z}_{\rm Eis}(k),\mathbf{z}'_{\rm Eis}(k)\in\mathscr{D}_{\rm alg}(\mathbf{M}_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}),M_k^{\rm cl,\,qh}(\mathbf{Q}^{\rm cycl})),$$

telles que, quels que soient $r\in\mathbf{Q}^*$ et $(a,b)\in\mathbf{Q}^2$, l'on ait

$$\int_{\binom{a+r\widehat{\mathbf{Z}}}{b+r\widehat{\mathbf{Z}}}}\mathbf{z}_{\rm Eis}(k)=r^{-k}E^{(k)}_{-\frac{b}{r},\frac{a}{r}},\qquad\int_{\binom{a+r\widehat{\mathbf{Z}}}{b+r\widehat{\mathbf{Z}}}}\mathbf{z}'_{\rm Eis}(k)=r^{k-2}F^{(k)}_{\frac{b}{r},-\frac{a}{r}}$$

De plus, si $k\neq 2$, alors $\mathbf{z}_{\rm Eis}(k)$ et $\mathbf{z}'_{\rm Eis}(k)$ sont à valeurs dans $M_k^{\rm cl}(\mathbf{Q}^{\rm cycl})$.

16.1.3. Quelques q-développements. — Si $\alpha\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, posons

$$\zeta(\alpha,s)=\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*,\ n\equiv\alpha\bmod\mathbf{Z}}n^{-s}\quad\text{et}\quad\zeta^*(\alpha,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{2i\pi\,n\alpha}n^{-s}.$$

Proposition 16.3. — *Si $k\geq 1$, et $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, alors le q-développement $\sum_{n\in\mathbf{Q}_+}a_nq^n$ de $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ est donné par*

$$\sum_{n\in\mathbf{Q}_+^*}\frac{a_n}{n^s}=\zeta(\alpha,s-k+1)\zeta^*(\beta,s)+(-1)^k\zeta(-\alpha,s-k+1)\zeta^*(-\beta,s)$$

et $a_0=\zeta(\beta,1-k)$ [resp. $a_0=\frac12(\zeta^*(\beta,0)-\zeta^*(-\beta,0))$] si $k\neq 1$ ou $\alpha\neq 0$ (resp. si $k=1$ et $\beta=0$).

Remarque 16.4. — Il y a des formules similaires pour le q-développement de $E_{\alpha,\beta}^{(k)}$, mais nous n'en aurons pas besoin.

16.2. Unités de Siegel

16.2.1. La distribution $\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}$. — Voir [**42**, chap. 1] pour ce qui suit (ainsi que [**45**]). Soit

$$\underset{\rightarrow}{\mathscr{O}} = \varinjlim_N \mathscr{O}(Y(N)).$$

On identifie $\underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}$ aux fonctions ϕ sur $\mathscr{H} \times \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, invariantes par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ (pour l'action $*$), holomorphes en τ et avec un pôle d'ordre fini aux pointes, et dont le q-développement vérifie $\mathscr{K}(\phi, u) \in \mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}$ et $\sigma_a(\mathscr{K}(\phi, u)) = \mathscr{K}(\phi, au)$ quels que soient $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $u \in \mathbf{A}^{]\infty[,*}$. Comme d'habitude (lemme 5.2), l'action naturelle de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ sur $\underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}$ devient l'action $\star$ via cette identification.

La fonction $\theta(\tau, z)$ n'est pas périodique en z de période $\mathbf{Z}\tau + \mathbf{Z}$, mais si $c \geq 2$ est un entier premier à 6, alors la fonction $q_z^{\frac{c-c^2}{2}} \theta(\tau, z)^{c^2} \theta(\tau, cz)^{-1}$ est périodique. Si $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2 - (0, 0)$, et si $(a, b) \in \mathbf{Q}^2$ a pour image $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2$, posons

$$g_{c,\alpha,\beta} = \theta(\tau, a\tau + b)^{c^2} \theta(\tau, ca\tau + cb)^{-1}.$$

Proposition 16.5. — *Soient* $\alpha, \beta \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$.

(i) *Si* $c \in \mathbf{N}$ *est premier à 6 et si* $(c\alpha, c\beta) \neq (0, 0)$, *alors il existe* $\tilde{g}_{c,\alpha,\beta} \in \mathscr{O}(Y(N))^*$, *unique, dont le pull-back par* $\mathscr{H}^+ \to (\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+) \times \{1\} \hookrightarrow Y(N)(\mathbf{C})$ *est* $g_{c,\alpha,\beta}$.

(ii) *L'élément* $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = \tilde{g}_{c,\alpha,\beta}^{1/(c^2-1)}$ *de* $\mathbf{Q} \otimes \underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^*$ *ne dépend pas du choix de* c *congru à* 1 *modulo* N. *De plus, quel que soit* c *premier à* 6, *on a* $\tilde{g}_{c,\alpha,\beta} = \tilde{g}_{\alpha,\beta}^{c^2} \tilde{g}_{c\alpha,c\beta}^{-1}$.

Remarque 16.6. — (i) Si α et β sont les images de $\frac{a}{N}$ et $\frac{b}{N}$, avec $0 \leq \frac{a}{N} < 1$, le q-développement de $\tilde{g}_{\alpha,\beta}$ sur $(\Gamma(N)\backslash\mathscr{H}^+) \times \{1\}$ est :

$$g_{\alpha,\beta} = q^{B_2(\frac{a}{N})} \prod_{n \geq 0} (1 - q^n q^{\frac{a}{N}} \zeta_N^b) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n q^{-\frac{a}{N}} \zeta_N^{-b}), \quad \text{où } B_2(x) = \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{12}.$$

(ii) On a

$$\tilde{g}_{\alpha,\beta} = \tilde{g}_{-\alpha,-\beta}$$

et les relations de distribution suivantes :

$$\prod_{e\alpha'=\alpha,\, e\beta'=\beta} \tilde{g}_{\alpha',\beta'} = \tilde{g}_{\alpha,\beta}, \qquad \prod_{e\beta'=\beta} \tilde{g}_{\alpha,\beta'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[} \star \tilde{g}_{\alpha,\beta}.$$

(iii) Le $\mathbf{Q}$-module $\underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^* \otimes \mathbf{Q}$ est engendré par les $\tilde{g}_{\alpha,\beta}$, le module des relations étant engendré par les relations du (ii).

(iv) On a

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star \tilde{g}_{\alpha,\beta} = \tilde{g}_{d\alpha - c\beta, -b\alpha + a\beta}, \quad \text{si } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}).$$

Soit $\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}) = \mathbf{M}_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \smallsetminus \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Alors $\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ est stable par multiplication à gauche par $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

Théorème 16.7. — *Il existe*[41]

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}} \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}), \mathbf{Q} \otimes \underrightarrow{\mathscr{O}}^*),$$

telle que, quels que soient $r \in \mathbf{Q}_+^*$ *et* $(a,b) \in \mathbf{Q}^2 - r\mathbf{Z}^2$, *on ait*

$$\int_{\left(\begin{smallmatrix} a+r\widehat{\mathbf{Z}} \\ b+r\widehat{\mathbf{Z}} \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}} = \tilde{g}_{\frac{-b}{r}, \frac{a}{r}} = \tilde{g}_{\frac{b}{r}, \frac{-a}{r}}.$$

De plus, $\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}$ *est invariante sous l'action naturelle de* $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

Démonstration. — L'existence de $\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}$ résulte de la première des relations de distribution du (ii) de la rem. 16.6.

Pour prouver l'invariance par $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, il s'agit de prouver que, si U est un ouvert de $\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et si $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, alors

$$\int_{\gamma U} \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}} = \gamma \star \int_U \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}.$$

Par linéarité, il suffit de le prouver pour $U = \left(\begin{smallmatrix} x+r\widehat{\mathbf{Z}} \\ y+r\widehat{\mathbf{Z}} \end{smallmatrix}\right)$, avec $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \notin r\mathbf{M}_{2,1}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et comme $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ est engendré, d'après la théorie des diviseurs élémentaires, par $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ et par $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[},\ a, b \in \mathbf{Q}_+^*,\ \frac{b}{a} \in \mathbf{N}\right\}$, il suffit de le prouver pour γ d'une des formes ci-dessus.

• Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, alors $\gamma U = \left(\begin{smallmatrix} ax+by+r\widehat{\mathbf{Z}} \\ cx+dy+r\widehat{\mathbf{Z}} \end{smallmatrix}\right)$, et donc $\int_{\gamma U} = \tilde{g}_{\frac{-cx-dy}{r}, \frac{ax+by}{r}}$. Tandis que $\gamma \star \int_U \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}} = \gamma \star \tilde{g}_{\frac{-y}{r}, \frac{x}{r}} = \tilde{g}_{\frac{-dy-cx}{r}, \frac{by+ax}{r}}$.

• Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}$, on peut supposer $a = 1$ car le résultat est trivial pour $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, et alors $b \in \mathbf{N}$. Alors

$$\gamma U = \left(\begin{smallmatrix} x+r\widehat{\mathbf{Z}} \\ by+br\widehat{\mathbf{Z}} \end{smallmatrix}\right) = \sqcup_{i=0}^{b-1} \left(\begin{smallmatrix} x+i+br\widehat{\mathbf{Z}} \\ by+br\widehat{\mathbf{Z}} \end{smallmatrix}\right),$$

et donc, d'après la seconde relation de distribution du (ii) de la remarque 16.6,

$$\int_{\gamma U} \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}} = \prod_{i=0}^{b-1} \tilde{g}_{\frac{-y}{r}, \frac{x+i}{br}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \star \tilde{g}_{\frac{-y}{r}, \frac{x}{r}},$$

ce qui permet de conclure. □

16.2.2. Théorie de Kummer et l'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$. — Comme la distribution $\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}$ est invariante par $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, elle l'est aussi par $\Pi'_{\mathbf{Q}}$ qui agit à travers $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et on note

$$\mathrm{Kum}(\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}) \in H^1(\Pi'_{\mathbf{Q}}, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}), \mathbf{Q}_p(1)))$$

41. Si X est un espace localement profini, et si Λ est un anneau, on note $\mathrm{LC}_c(X, \Lambda)$ le Λ-module des fonctions localement constantes à support compact et, si V est un Λ-module, alors $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(X, V) = \mathrm{Hom}(\mathrm{LC}_c(X, \Lambda), V)$ est l'espace des distributions algébriques sur X à valeurs dans V.

son image par l'application de Kummer [42].

Soit

$$\mathbf{M}_2'(\mathbf{A}^{]\infty[}) = \mathbb{G}(\mathbf{Q}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbf{A}^{]\infty,p[}) \subset \mathbf{M}_{2,1}'(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times \mathbf{M}_{2,1}'(\mathbf{A}^{]\infty[}) \subset \mathbf{M}_2(\mathbf{A}^{]\infty[}).$$

Alors $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ agit par multiplication à gauche et à droite sur $\mathbf{M}_2'(\mathbf{A}^{]\infty[})$. On définit

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} = -\mathrm{Kum}(\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}) \otimes \mathrm{Kum}(\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}) \in H^2(\Pi_{\mathbf{Q}}', \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2'(\mathbf{A}^{]\infty[}), \mathbf{Q}_p(2))).$$

Par construction, on a

$$\int_{\left(\begin{smallmatrix} a+M\widehat{\mathbf{Z}} & b+N\widehat{\mathbf{Z}} \\ c+M\widehat{\mathbf{Z}} & d+N\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} = \mathrm{Kum}(\tilde{g}_{\frac{d}{N},\frac{-b}{N}}) \cup \mathrm{Kum}(\tilde{g}_{\frac{-c}{M},\frac{a}{M}}), \quad \text{si } \left(\begin{smallmatrix} a+M\widehat{\mathbf{Z}} & b+N\widehat{\mathbf{Z}} \\ c+M\widehat{\mathbf{Z}} & d+N\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right) \subset \mathbf{M}_2'(\mathbf{A}^{]\infty[}).$$

Proposition 16.8. — *On a*

$$\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & v\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[} \star \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} = \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}, \quad \textit{si } u, v \in \mathbf{Q}^*.$$
$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \star \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} = -\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}.$$

Démonstration. — On a $\int_U g \star \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}} = \int_{Ug} \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$. Comme

$$\left(\begin{smallmatrix} a+N\widehat{\mathbf{Z}} & b+M\widehat{\mathbf{Z}} \\ c+N\widehat{\mathbf{Z}} & d+M\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & v\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ua+uN\widehat{\mathbf{Z}} & vb+vM\widehat{\mathbf{Z}} \\ uc+uN\widehat{\mathbf{Z}} & vd+vM\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right),$$

la première égalité se déduit de l'identité

$$\int_{\left(\begin{smallmatrix} ua+uN\widehat{\mathbf{Z}} & vb+vM\widehat{\mathbf{Z}} \\ uc+uN\widehat{\mathbf{Z}} & vd+vM\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right)} = \mathrm{Kum}(\tilde{g}_{\frac{vd}{vM},\frac{-vb}{vM}}) \cup \mathrm{Kum}(\tilde{g}_{\frac{-uc}{uN},\frac{ua}{uN}}) = \int_{\left(\begin{smallmatrix} a+N\widehat{\mathbf{Z}} & b+M\widehat{\mathbf{Z}} \\ c+N\widehat{\mathbf{Z}} & d+M\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right)} \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$$

La seconde égalité se prouve de même, le signe venant de ce que le cup-produit est alterné. □

16.2.3. L'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{c,d}$. — Pour aller plus loin, il faut se débarrasser des dénominateurs dans la distribution $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$. Notons que $\widehat{\mathbf{Z}}$ agit naturellement sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{]\infty[}/\widehat{\mathbf{Z}}$. Maintenant, il résulte du (i) de la prop. 16.5 que, si $c \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$, alors $c^2 \otimes \tilde{g}_{\alpha,\beta} - \tilde{g}_{c\alpha,c\beta} \in \widehat{\mathbf{Z}} \otimes \underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^*$ (appliquer la prop. 16.5 à une suite de $c_n \in \mathbf{N}$ vérifiant $c_n \to c$ dans $\widehat{\mathbf{Z}}$), et donc

$${}_c\tilde{g}_{\alpha,\beta} = c_p^2 \otimes \tilde{g}_{\alpha,\beta} - \tilde{g}_{c\alpha,c\beta} \in \mathbf{Z}_p \otimes \underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^* \subset \mathbf{Q}_p \otimes \underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^*.$$

La matrice $(c) \in \mathbf{M}_1(\mathbf{A}^{]\infty[})$ agit sur $\mathbf{M}_{2,1}'(\mathbf{A}^{]\infty[})$ par multiplication à droite, et donc aussi de manière compatible sur les distributions sur cet espace. Il résulte de ce qui précède que

$$(c_p^2 - (c)) \star \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}} \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_{2,1}'(\mathbf{A}^{]\infty[}), \mathbf{Z}_p \otimes \underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^*)$$

42. Soit $Z^0 = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}},\ x_n \in \mathscr{M}(\overline{\mathbf{Q}})^*,\ x_{n+1}^p = x_n \text{ si } n \in \mathbf{N}\}$. Soit $Z = \mathbf{Q} \otimes Z^0$. Alors Z est muni d'une action de $\Pi_{\mathbf{Q}}'$ et la suite $0 \to \mathbf{Q}_p(1) \to Z \to \underset{\rightarrow}{\mathscr{O}}^* \otimes \mathbf{Q} \to 0$ est une suite exacte de $\Pi_{\mathbf{Q}}'$-modules. Posons $X = \mathbf{M}_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ et soit $(\phi_i)_{i\in I}$ une base de $\mathrm{LC}_c(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}$. On peut fabriquer une distribution algébrique μ sur X, à valeurs dans Z, en prenant pour $\int_X \phi_i\, \mu$ n'importe quel relèvement dans Z de $\int_X \phi_i\, \mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}$ et alors $\mathrm{Kum}(\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}})$ est l'image du cocycle $\sigma \mapsto \mu \star \sigma - \mu$.

(l'intégrale sur $\left(\begin{smallmatrix} a+r\widehat{\mathbf{Z}} \\ b+r\widehat{\mathbf{Z}}\end{smallmatrix}\right)$ est ${}_c\tilde{g}_{\frac{-b}{r},\frac{a}{r}}$), et donc que

$$(c_p^2-(c))\star \mathrm{Kum}(\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}})\in H^1(\Pi'_{\mathbf{Q}},\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(1))).$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{c,d}:=\big(c_p^2-\left(\begin{smallmatrix} c&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)\big(d_p^2-\left(\begin{smallmatrix} 1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\big)\star\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}\in H^2\big(\Pi'_{\mathbf{Q}},\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}\big(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(2)\big)\big).$$

L'intérêt d'avoir supprimé les dénominateurs est de pouvoir intégrer des fonctions continues à support compact et pas seulement des fonctions localement constantes (en d'autres termes, $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(2))$ est l'espace des mesures $\mathrm{Mes}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(2))$ sur $\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[})$, à valeurs dans $\mathbf{Z}_p(2)$).

16.3. Torsion à la Soulé

16.3.1. Formalisme général. — Soient G' un groupe et X' un ensemble muni d'actions à droite $(g',x')\mapsto x'g'$ et à gauche $(g',x')\mapsto g'x'$ de G' commutant entre elles (i.e. si $x'\in X'$ et $g'_1,g'_2,g'_3,g'_4\in G'$, alors $g'_1g'_2x'g'_3g'_4$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait les opérations).

Soit G_p un groupe, et soient $G=G_p\times G'$, $X=G_p\times X'$. On note $g=(g_p,g')$ et $x=(x_p,x')$ les éléments de G et X, et on fait agir G sur X à gauche par $((g_p,g'),(x_p,x'))\mapsto(g_px_p,g'x')$ et à droite par $((g_p,g'),(x_p,x'))\mapsto(x_pg_p,x'g')$; ces deux actions commutent.

Soient H_1,H_2 des groupes, munis de morphismes $\iota_1:H_1\to G$ et $\iota_2:H_2\to G$. Si $h_i\in H_i$, on note simplement h_i l'élément $\iota_i(h_i)$ de G. Soit $H=H_1\times H_2$.

Soit $A=\mathbf{Z}_p,\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L,L,\ldots$. Soit $\Phi=\mathscr{C}_c(X,A)$ et Φ^* son dual (ou un sous-espace de son dual). Si $\alpha\in\mathscr{C}(X,A)$, on définit $\alpha\mu\in\Phi^*$, si $\mu\in\Phi^*$ par la formule $\langle\alpha\mu,\phi\rangle=\langle\mu,\alpha\phi\rangle$.

On munit Φ d'une action de $H=H_1\times H_2$, en posant $\big((h_1,h_2)\cdot\phi\big)(x)=\phi(h_1^{-1}xh_2)$. On munit Φ^* de l'action duale : $\langle h\cdot\mu,\phi\rangle=\langle\mu,h^{-1}\cdot\phi\rangle$, si $h\in H$, $\mu\in\Phi^*$ et $\phi\in\Phi$.

Soit W une A-représentation de rang fini de G_p, et soit W^* sa duale :

$$\langle g\cdot v^*,v\rangle=\langle v^*,g^{-1}\cdot v\rangle,\quad \text{si } g\in G_p,\ v^*\in W^* \text{ et } v\in W.$$

On note $W_{H_i},W^*_{H_i}$, pour $i=1,2$, les représentations de H_i obtenues via le morphisme $\iota_i:H_i\to G\to G_p$. On les voit aussi comme des représentations de H en faisant agir H_{3-i} trivialement.

Fixons une base e_i^* de W^* sur A. Si $w^*\in W^*$, soient

$$\phi_{w^*}:X\to W^*,\quad \phi_{w^*,i}:X\to A,\qquad \phi_{w^*}(x)=x_p\cdot w^*=\sum\phi_{w^*,i}(x)e_i^*.$$

Soit V une représentation de H_1 ; on considère V comme une représentation de H en faisant agir H_2 trivialement. Si $\mu\in\Phi^*$, $v\in V$, et $w^*\in W^*_{H_2}$, on définit

$$\alpha_W(\mu\otimes v\otimes w^*)=\sum_i(\phi_{w^*,i}\mu)\otimes v\otimes e_i^*\in\Phi^*\otimes(V\otimes W^*_{H_1}).$$

Lemme 16.9. — (i) $\alpha_W : (\Phi^* \otimes V) \otimes W^*_{H_2} \to \Phi^* \otimes (V \otimes W^*_{H_1})$ *est H-équivariante.*

(ii) α_W *induit un morphisme H_2-équivariant*

$$\alpha_W : H^i(H_1, \Phi^* \otimes V) \otimes W^*_{H_2} \to H^i(H_1, \Phi^* \otimes (V \otimes W^*_{H_1})).$$

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). Pour prouver le (i), il suffit de regarder ce qui se passe sur les tenseurs élémentaires de la forme $\delta_a \otimes v \otimes w^*$, où δ_a est la masse de Dirac en $a = (a_p, a') \in X$. On note $w^*_{H_i}$ l'élément w^* de $W^*_{H_i}$. On a

$$\alpha_W(\delta_a \otimes v \otimes w^*_{H_2}) = \delta_a \otimes v \otimes (a_p \cdot w^*)_{H_1}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \alpha_W\big((h_1, h_2) \cdot (\delta_a \otimes v \otimes w^*_{H_2})\big) &= \alpha_W\big(\delta_{h_1 a h_2^{-1}} \otimes (h_1 \cdot v) \otimes (h_2 \cdot w^*)_{H_2}\big) \\ &= \delta_{h_1 a h_2^{-1}} \otimes (h_1 \cdot v) \otimes ((h_1 a h_2^{-1})_p h_2 \cdot w^*)_{H_1} \\ (h_1, h_2) \cdot \alpha_W(\delta_a \otimes v \otimes w^*_{H_2})) &= (h_1, h_2) \cdot \big(\delta_a \otimes v \otimes (a_p \cdot w^*)_{H_1}\big) \\ &= \delta_{h_1 a h_2^{-1}} \otimes (h_1 \cdot v) \otimes (h_1 a_p \cdot w^*)_{H_1} \end{aligned}$$

D'où le résultat (on a $(h_1 a h_2^{-1})_p = h_1 a_p h_2^{-1}$). □

Si $v \in W$ et $v^* \in W^*$, soit

$$\phi_{v^*,v} \in \Phi, \qquad \phi_{v^*,v}(g) = \langle g \cdot v^*, v\rangle = \langle \phi_{v^*}(g), v\rangle.$$

L'application $v^* \otimes v \mapsto \phi_{v^*,v}$ induit un morphisme H-équivariant de $W^*_{H_2} \otimes W_{H_1}$ dans Φ : si $h = (h_1, h_2)$, alors on a $h \cdot (v^* \otimes v) = (h_2 \cdot v^*) \otimes (h_1 \cdot v)$, et donc

$$\phi_{h\cdot(v^*\otimes v)}(g) = \langle g h_2 \cdot v^*, h_1 \cdot v\rangle = \langle h_1^{-1} g h_2 \cdot v^*, v\rangle = \big(h \cdot \phi_{v^* \otimes v}\big)(g).$$

Corollaire 16.10. — *Les deux morphismes H-équivariants ci-dessous sont égaux :*

$$\begin{array}{ccccc} (\Phi^*\otimes V)\otimes W^*_{H_2}\otimes W_{H_1}\otimes\Phi & \longrightarrow & (\Phi^*\otimes V)\otimes\Phi & \longrightarrow & V, \\ (\mu\otimes v)\otimes w^*\otimes w\otimes\phi & \longmapsto & (\mu\otimes v)\otimes(\phi_{w^*,w}\phi) & \longmapsto & \langle \mu, \phi_{w^*,w}\phi\rangle\, v \\ (\Phi^*\otimes V)\otimes W^*_{H_2}\otimes W_{H_1}\otimes\Phi & \to & (\Phi^*\otimes V\otimes W^*_{H_2})\otimes(\Phi\otimes W_{H_1}) & \longrightarrow & V, \\ (\mu\otimes v)\otimes w^*\otimes w\otimes\phi & \longmapsto & \alpha_W(\mu\otimes v\otimes w^*)\otimes(\phi\otimes w) & \longmapsto & \langle \alpha_W(\mu\otimes w^*), \phi\otimes w\rangle\, v \end{array}$$

16.3.2. La distribution $\mathbf{z}^{c,d}_{\mathrm{Kato}}(k, j)$. — On va appliquer ce qui précède à

$$X' = \mathbf{M}_2(\mathbf{A}^{]\infty,p[}), \quad X = \mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), \quad G' = \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty,p[}), \quad G_p = \mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$$
$$G = H_2 = \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}), \quad H_1 = \Pi'_{\mathbf{Q}}, \quad W = W_{k,j} \quad \text{et} \quad V = \mathbf{Q}_p(2)$$
$$\Phi = \mathscr{C}_c(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), L), \quad \Phi^* = \mathrm{Mes}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), L)$$

On définit

$$\mathbf{z}^{c,d}_{\mathrm{Kato}}(k, j) := \alpha_{W_{k,j}}\big(\mathbf{z}^{c,d}_{\mathrm{Kato}} \otimes \tfrac{(e_2^*)^k}{(e_1^* \wedge e_2^*)^j}\big) \in H^2(\Pi'_{\mathbf{Q}}, \mathrm{Mes}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), W^*_{k,j}(2))).$$

On note encore $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{c,d}(k,j)$ la restriction à $\Pi_{\mathbf{Q}}\subset\Pi'_{\mathbf{Q}}$.

On a $H^4_c(\Pi_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Q}_p(2))=H^4_{\text{ét},c}(Y(1)_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Q}_p(2))=\mathbf{Q}_p$; on en déduit des accouplements

$$\langle\ ,\rangle:\big(H^2(\Pi_{\mathbf{Q}_p},\Phi^*\otimes\mathbf{Q}_p(2))\otimes W^*_{H_2}\big)\times\big(H^2_c(\Pi_{\mathbf{Q}_p},\Phi\otimes W_{H_1})\big)\to L$$
$$\langle\ ,\rangle:\big(H^2(\Pi_{\mathbf{Q}_p},\Phi^*\otimes\mathbf{Q}_p(2))\big)\times\big(H^2_c(\Pi_{\mathbf{Q}_p},\Phi\otimes W_{H_1})\otimes W^*_{H_2}\big)\to L$$

Le cor. 16.10 fournit alors le résultat suivant :

Lemme 16.11. — *Si $\phi\in H^2_c(\Pi_{\mathbf{Q}},\mathscr{C}_c(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}),W_{k,j}))$, alors*

$$\langle\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{c,d},\phi\otimes\tfrac{(e_2^*)^k}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\rangle=\langle\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{c,d}(k,j),\phi\rangle.$$

Si S est un ensemble fini de nombres premiers contenant p, on définit

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}\in H^2(\Pi'_{\mathbf{Q}},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Q}_p(2)))$$
$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(k,j)\in H^2(\Pi'_{\mathbf{Q}},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),W^*_{k,j}(2)))$$

par les formules (où $\phi_S\in\mathscr{C}_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),L)$)

$$\int_{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)}\phi_S\,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}=\int\phi_S\otimes\mathbf{1}_{\mathbf{M}_2(\widehat{\mathbf{Z}}^{]S[})}\,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}$$
$$\int_{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)}\phi_S\,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(k,j)=\int\phi_S\otimes\mathbf{1}_{\mathbf{M}_2(\widehat{\mathbf{Z}}^{]S[})}\,\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(k,j)$$

Remarque 16.12. — On peut aussi définir $\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}^{S}$, $\mathbf{z}_{\mathrm{Eis}}^{S}$, $\mathbf{z}_{\mathrm{Eis}}^{S,'}$, $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}$ et $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(k,j)$ directement, en partant des formules :

$$\int_{\left(\begin{smallmatrix}a+r\mathbf{Z}_S\\ b+r\mathbf{Z}_S\end{smallmatrix}\right)}\mathbf{z}_{\mathrm{Siegel}}^{S}=\tilde g_{\frac{-b}{r},\frac{a}{r}}=\tilde g_{\frac{b}{r},\frac{-a}{r}},\quad\text{etc...}$$

si $r\in\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]^*$, $r>0$, et $(a,b)\in\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]^2\smallsetminus r\mathbf{Z}^2$. Cela permet de prouver qu'en fait toutes ces distributions sont obtenues par inflation à partir de $\Pi'_{\mathbf{Q},S}$

16.4. La loi de réciprocité explicite de Kato

16.4.1. La suite spectrale de Hochschild-Serre. — La suite spectrale de Hochshild-Serre fournit des isomorphismes

$$H^2(\Pi'_{\mathbf{Q}},\mathrm{Mes}(\mathbf{M}'(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(2)))\cong H^1(G_{\mathbf{Q}},H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}}},\mathrm{Mes}(\mathbf{M}'(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(2))))$$
$$H^2(\Pi'_{\mathbf{Q},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Z}_p(2)))\cong H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Z}_p(2))))$$

On peut donc considérer que :

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{c,d}\in H^1(G_{\mathbf{Q}},H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}}},\mathrm{Mes}(\mathbf{M}'(\mathbf{A}^{]\infty[}),\mathbf{Z}_p(2))))$$
$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}\in H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Z}_p(2))))$$

16.4.2. La distribution $\tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}(k,j)$. — On voit $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ comme un élément de $M^{\mathrm{cl}}_{k,0}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$ et $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ comme un élément de $M^{\mathrm{cl}}_{k,k-1}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$. On note $\widetilde{E}^{(k)}_{\alpha,\beta} \in \underrightarrow{H}^0(\omega^{k,0})$ et $\widetilde{F}^{(k)}_{\alpha,\beta} \in \underrightarrow{H}^0(\omega^{k,k-1})$ les éléments correspondant à $(-2i\pi)^k E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ et $(-2i\pi)\,F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ via les isomorphismes de la rem. 5.7 et du n° 6.3.3. (Si $k=2$, il faut supposer $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ pour $F^{(k)}$ et remplacer $\underrightarrow{H}^0(\omega^{2,0})$ par $\underrightarrow{H}^0(W^{2,0}_{\mathrm{dR}})$ pour $E^{(k)}$.)

Proposition 16.13. — *Si* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\widehat{\mathbf{Z}})$*, et si* $(\alpha,\beta)\in(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^2$*, alors*

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{E}^{(k,j)}_{\alpha,\beta} = \widetilde{E}^{(k,j)}_{d\alpha-c\beta,-b\alpha+a\beta} \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{F}^{(k,j)}_{\alpha,\beta} = \widetilde{F}^{(k,j)}_{d\alpha-c\beta,-b\alpha+a\beta}.$$

On note $\tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}(k)$ et $\tilde{\mathbf{z}}'_{\mathrm{Eis}}(k)$ les distributions obtenues en remplaçant $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ et $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ par $\widetilde{E}^{(k)}_{\alpha,\beta}$ et $\widetilde{F}^{(k)}_{\alpha,\beta}$ dans les définitions de $\mathbf{z}_{\mathrm{Eis}}(k)$ et $\mathbf{z}'_{\mathrm{Eis}}(k)$. La preuve du th. 16.7 s'adapte et nous donne le résultat suivant.

Théorème 16.14. — *Les distributions* $\tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}(k)$ *et* $\tilde{\mathbf{z}}'_{\mathrm{Eis}}(k)$ *sont invariantes sous l'action naturelle de* $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

Si $k\geq 1$, alors (y compris si $k=2$) :

$$\begin{aligned}\big(c_p^2 - c_p^k(c)\big)\star\tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}(k) &\in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}), \underrightarrow{H}^0(\omega^{k,0}))\\ \big(c_p^2 - c_p^{2-k}(c)\big)\star\tilde{\mathbf{z}}'_{\mathrm{Eis}}(k) &\in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[}), \underrightarrow{H}^0(\omega^{k,k-1}))\end{aligned}$$

Le produit fournit des flèches

$$\begin{aligned}\underrightarrow{H}^0(\omega^{j,0})\times\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2-j,k+1-j}) &\to \underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,k+1-j})\\ \underrightarrow{H}^0(W^{j,0}_{\mathrm{dR}})\times\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2-j,k+1-j}) &\to \underrightarrow{H}^0(W^{k+2,k+1-j}_{\mathrm{dR}})\end{aligned}$$

En utilisant l'inclusion $\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}) \subset \mathbf{M}_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[})\times\mathbf{M}'_{2,1}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, cela permet de construire, si $k\geq 2$ et $1\leq j\leq k+1$, des distributions

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}(k,j) &= \tfrac{(-1)^j}{(j-1)!}\mathbf{z}_{\mathrm{Eis}}(j)\otimes\mathbf{z}'_{\mathrm{Eis}}(k+2-j) \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), \underrightarrow{H}^0(W^{k+2,k+1-j}_{\mathrm{dR}}))\\ \tilde{\mathbf{z}}^{c,d}_{\mathrm{Eis}}(k,j) &= \big(c_p^2 - c_p^j\left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\big)\big(d_p^2 - d_p^{j-k}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\big)\star\mathbf{z}_{\mathrm{Eis}}(k,j)\\ &\qquad\qquad \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[}), \underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,k+1-j}))\end{aligned}$$

La valeur de ces distributions sur une fonction localement constante à support compact est une combinaison linéaire de produits de séries d'Eisenstein. Comme pour $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$, si S est un ensemble fini de nombres premiers contenant p, on définit :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{z}}^S_{\mathrm{Eis}}(k,j) &\in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), \underrightarrow{H}^0(W^{k+2,k+1-j}_{\mathrm{dR}})_S),\\ \tilde{\mathbf{z}}^{S,c,d}_{\mathrm{Eis}}(k,j) &\in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), \underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,k+1-j})_S)\end{aligned}$$

16.4.3. L'exponentielle duale de Bloch-Kato. — Accoupler $\mathbf{z}^{c,d}_{\mathrm{Kato}}(k,j)$ avec une fonction ϕ localement constante, à support compact dans $\mathbf{M}'_2(\mathbf{A}^{]\infty[})$, produit

$$\langle \mathbf{z}^{c,d}_{\mathrm{Kato}}(k,j), \phi\rangle \in H^1(G_{\mathbf{Q}}, \underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}((W^{\text{ét}}_{k,j})^*(2)))$$

On a aussi $(W^{\text{ét}}_{k,j})^*(2) = W^{\text{ét}}_{k,k-j+2}$. L'exponentielle duale de Bloch-Kato fournit une flèche

$$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(W^{\text{ét}}_{k,k-j+2})) \to \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(\underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(W^{\text{ét}}_{k,k-j+2})).$$

On a

$$D_{\mathrm{dR}}(\underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(W^{\text{ét}}_{k,k-j+2})) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,k-j+2}) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,k-j}) \otimes \zeta^2_{\mathrm{dR}}$$

comme module filtré, et la filtration sur $\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,k-j})$ a deux cran, le sous-objet étant $\underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,k+1-j})$. Les poids de Hodge-Tate de $\underrightarrow{H}^1_{\text{ét}}(W^{\text{ét}}_{k,k+2-j})$ étant $k+2-j$ et $1-j$, on a $\mathrm{Fil}^0(\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR}}(W^{\mathrm{dR}}_{k,k+2-j})) = \underrightarrow{H}^0(\omega^{k+2,k+1-j}) \otimes \zeta^2_{\mathrm{dR}}$ si et seulement si $1 \le j \le k+1$.

La loi de réciprocité explicite de Kato [**42**, prop. 10.10] (et [**42**, prop. 11.7] pour faire la comparaison entre deux application $\exp^*$) nous donne [43] :

Théorème 16.15. — *Si $0 \le j \le k$, alors*

$$\exp^*(\mathbf{z}^{c,d}_{\mathrm{Kato}}(k,j)) = \tilde{\mathbf{z}}^{c,d}_{\mathrm{Eis}}(k,j) \otimes \zeta^2_{\mathrm{dR}}, \quad \exp^*(\mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}}(k,j)) = \tilde{\mathbf{z}}^{S,c,d}_{\mathrm{Eis}}(k,j) \otimes \zeta^2_{\mathrm{dR}}.$$

17. Un avatar algébrique des produits de Rankin

Dans ce chapitre, nous factorisons (rem. 17.11) le système de Beilinson-Kato comme un produit de deux symboles $(0,\infty)$, et nous terminons la preuve du th. 15.31 en prouvant (th. 17.10) que l'élément $\mathbf{z}^S(\rho_T)$ n'a pas de dénominateur. La preuve repose sur l'évaluation de $\mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}}$ en des fonctions tests bien choisies (th. 17.3, avatar de [**42**, th. 6.6], dont la preuve repose sur la méthode de Rankin) ; le résultat fait apparaître un produit de deux valeurs de fonctions L. On en déduit la factorisation voulue en un point classique (th. 17.6), et on obtient une factorisation en famille (lemme 17.9) par densité des points classiques.

17.1. L'application exponentielle

17.1.1. Une formule explicite générale. — Si X est un espace fonctionnel comme LC, LP, $\mathscr{C}$, Mes, etc., et si $\sharp \in \{\ , c, \mathrm{par}\}$, on pose

$$H^1_\sharp(\mathbb{G}, X_L) := H^1_\sharp(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$$
$$H^1_\sharp(\mathbb{G}, X_L)_S := H^1_\sharp(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\tfrac{1}{S}]), X(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S), L))$$

43. Si on veut utiliser les calculs de [**11**], il faut faire attention que $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ a changé ce qui échange les rôles de b et c (et rajoute des signes), et qu'on intègre $(be_1^* + de_2^*)^k$ au lieu de $(ae_1^* + be_2^*)^k$, ce qui échange les rôles de E et F. A la fin on retombe sur la même formule.

On suppose $1 \leq j \leq k+1$ (les poids de $\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t},c}(W_{k,j}^{\mathrm{\acute{e}t}})_S$ sont $j>0$ et $j-k-1\leq 0$). On a

$$D_{\mathrm{dR}}(\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t},c}(W_{k,j}^{\mathrm{\acute{e}t}})_S) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_S$$

On en déduit une application exponentielle de Bloch-Kato :

$$\exp : \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_S/\mathrm{Fil}^0 \to H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t},c}(W_{k,j}^{\mathrm{\acute{e}t}})_S).$$

On peut utiliser l'isomorphisme $\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{\acute{e}t},c}(W_{k,j}^{\mathrm{\acute{e}t}})_S \cong H^1(\mathbb{G}, \mathrm{LC}_L \otimes W_{k,j})_S$, tensoriser par $W_{k,j}^*$ et utiliser l'injection naturelle $\mathrm{LC}_L \otimes W_{k,j} \otimes W_{k,j}^* \hookrightarrow \mathscr{C}$ pour fabriquer une application, encore appelée exponentielle de Bloch-Kato :

$$\exp : L \otimes_{\mathbf{Q}} (\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_S/\mathrm{Fil}^0) \otimes W_{k,j}^* \to H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}_L)_S)$$

Notons que $H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}_L)_S$ est la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires de niveaux à support dans S.

Comme on l'a vu $H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}_L)_S$ et $H^1(\mathbb{G}, \mathrm{Mes}_L)_S$ sont en dualité (rem. 4.17). Si on veut inclure l'action de Galois, la dualité naturelle est à valeurs dans $H^2_c(X(1)^\times_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p(-1)$. Il s'ensuit que $H^1(\mathbb{G}, \mathrm{Mes}_L)_S(2)$ est le dual de Tate de $H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}_L)_S$. Combiné avec la dualité locale de Poitou-Tate, cela fournit une dualité

$$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, H^1(\mathbb{G}, \mathrm{Mes}_L)_S(2)) \times H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}_L)_S) \to \mathbf{Q}_p$$

En particulier, on peut accoupler $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}$ (plutôt sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$) et $\exp(\Phi)\otimes\check{v}$, si

$$\Phi \in \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_S/\mathrm{Fil}^0 \quad \text{et} \quad \check{v} \in W_{k,j}^*.$$

Proposition 17.1. — *Soit $\Phi \in \underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W_{k,j}^{\mathrm{dR}})_S/\mathrm{Fil}^0$. Alors, pour tout N à support dans S et tel que $\Phi \in H^1_{\mathrm{dR},c}(Y(N), W_{k,j}^{\mathrm{dR}})$, on a*

$$\langle \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}, \exp(\Phi) \otimes \tfrac{(e_2^*)^k}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\rangle_{\mathrm{\acute{e}t}} = \tfrac{(-1)^j}{(j-1)!} N^{k-2j} \langle \Phi^{c,d}, \widetilde{E}^{(j)}_{0,\frac{1}{N}} \widetilde{F}^{(k+2-j)}_{\frac{1}{N},0}\rangle_{\mathrm{dR},Y(N)} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}$$

avec

$$\Phi^{c,d} = \big(c_p^2 - c_p^j\big(\begin{smallmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\big)\big(d_p^2 - d_p^{j-k}\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^{-1}\end{smallmatrix}\big)\big) \star \Phi.$$

Démonstration. — Le lemme 16.11 fournit l'identité :

$$\langle \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}, \exp(\Phi) \otimes \tfrac{(e_2^*)^k}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\rangle_{\mathrm{\acute{e}t}} = \langle \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(k,j), \exp(\Phi)\rangle_{\mathrm{\acute{e}t}}.$$

Le th. 16.15 se traduit par

$$\begin{aligned}\big\langle \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(k,j), \exp(\Phi)\big\rangle_{\mathrm{\acute{e}t}} &= \big\langle \tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}^{S,c,d}(k,j) \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}^2, \Phi\big\rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}^{-1} \\ &= \big\langle \big(c_p^2 - c_p^j\big(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\big)\big(d_p^2 - d_p^{j-k}\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d\end{smallmatrix}\big)\big) \star \tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}^{S}(k,j), \Phi\big\rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}} \\ &= \big\langle \tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}^{S}(k,j), \big(c_p^2 - c_p^j\big(\begin{smallmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\big)\big(d_p^2 - d_p^{j-k}\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^{-1}\end{smallmatrix}\big)\big) \star \Phi\big\rangle_{\mathrm{dR}} \otimes \zeta_{\mathrm{dR}}\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la formule (6.5) et l'identité

$$\int_{1+N\mathrm{M}_2(\mathbf{Z}_S)} \tilde{\mathbf{z}}_{\mathrm{Eis}}^{S}(k,j) = \tfrac{(-1)^j}{(j-1)!} N^{k-2j} \tilde{F}^{(k+2-j)}_{\frac{1}{N},0} \tilde{E}^{(j)}_{0,\frac{1}{N}}. \quad \square$$

17.1.2. La méthode de Rankin-Selberg. — Un résultat classique de Shimura [**63**] (prop. 17.2 ci-dessous), qui se démontre en utilisant la méthode de Rankin, permet d'exprimer $\langle \Phi, \widetilde{E}^{(j)}_{0,\frac{1}{N}}\widetilde{F}^{(k+2-j)}_{\frac{1}{N},0}\rangle_{\mathrm{dR},Y(N)}$ en termes de valeurs spéciales de fonctions L.

Soit
$$E^{(j,s)}_{0,\frac{1}{N}}(\tau) = \sum_{\omega\in\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau} \frac{1}{(\omega+\frac{1}{N})^j}\Big(\frac{\operatorname{Im}\tau}{|\omega+\frac{1}{N}|^2}\Big)^{s-1-k}.$$

Proposition 17.2. — *Soient*
$$f = \sum_{n\in\frac{1}{M}\mathbf{Z},\, n>0} a_n q^n \in M^{\mathrm{par,\,cl}}_{k+2}(\Gamma(M)) \quad \text{et} \quad g = \sum_{n\in\frac{1}{M}\mathbf{Z},\, n\geq 0} b_n q^n \in M^{\mathrm{cl}}_{k+2-j}(\Gamma(M))$$
dont les fonctions L se factorisent sous la forme :
$$L(f,s) = \Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}[\frac{1}{M}]^*} \tfrac{a_n}{n^s}\Big)\prod_{\ell\nmid M}\big((1-\tfrac{\alpha_{\ell,1}}{\ell^s})(1-\tfrac{\alpha_{\ell,2}}{\ell^s})\big)^{-1}$$
$$L(g,s) = \Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}[\frac{1}{M}]^*} \tfrac{b_n}{n^s}\Big)\prod_{\ell\nmid M}\big((1-\tfrac{\beta_{\ell,1}}{\ell^s})(1-\tfrac{\beta_{\ell,2}}{\ell^s})\big)^{-1}$$
Alors
$$\int_{\Gamma(M)\backslash\mathscr{H}^+} f(-\overline{\tau})g(\tau)E^{(j,s)}_{0,\frac{1}{M}}(\tau)\, y^{k+2}\tfrac{dx\,dy}{y^2} = M^{1+j+2(s-1-k)}\tfrac{\Gamma(s)}{(4\pi)^s}D(f,g,s),$$
où l'on a posé
$$D(f,g,s) = \Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}[\frac{1}{M}]^*}\tfrac{a_nb_n}{n^s}\Big)\prod_{\ell\nmid M}\big((1-\tfrac{\alpha_{\ell,1}\beta_{\ell,1}}{\ell^s})(1-\tfrac{\alpha_{\ell,1}\beta_{\ell,2}}{\ell^s})(1-\tfrac{\alpha_{\ell,2}\beta_{\ell,1}}{\ell^s})(1-\tfrac{\alpha_{\ell,2}\beta_{\ell,2}}{\ell^s})\big)^{-1}$$

17.1.3. Système d'Euler de Kato et valeurs spéciales de fonctions L. — Soit maintenant π une représentation cohomologique encadrée de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, de poids $(k+2,j+1)$, avec $1\leq j\leq k+1$, de conducteur N et caractère central ω_π. Soit $\tilde\omega_\pi$ le caractère de Dirichlet associé à ω_π (étendu en une fonction multiplicative sur $\mathbf{Z}$, en posant $\tilde\omega_\pi(n)=0$ si $(n,N)\neq 1$). Notons que $\tilde\omega_\pi(-1)=(-1)^k$.

On renvoie au n° 7.2.3 et suivants pour la définition de v_π, $\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}$, f_π, f^*_π, $\lambda(\pi)$, etc. Notons que f_π est une forme primitive, ce qui implique
$$L(f_\pi,s) = \prod_\ell\big(1-\tfrac{a_\ell}{\ell^s}+\tfrac{\tilde\omega_\pi^{-1}(\ell)\ell^{k+1}}{\ell^{2s}}\big)^{-1}$$

On note π_S le produit tensoriel $\otimes_{\ell\in S}\pi_\ell$; c'est un sous-espace de $\mathrm{LC}(\mathbf{Q}_S^*,\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{S^\infty}))^{\mathbf{Z}_S^*}$. On peut utiliser l'action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_S^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ pour découper π_S : si $\eta:\mathbf{Z}_S^*\to L^*$ est un caractère localement constant, on note $\pi_S[\eta]$ l'espace des $\phi_S\in\mathbf{Q}(\pi,\eta)\otimes_{\mathbf{Q}(\pi)}\pi_S$ vérifiant $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\phi_S=\eta(a)\phi_S$, pour tout $a\in\mathbf{Z}_S^*$. (Ceci implique que ϕ_S est à valeurs dans $\mathbf{Q}(\pi,\eta)G(\eta^{-1})$.)

Soit $\alpha_{\pi,S}:\pi_S\to\mathbf{Q}(\pi)\otimes_{\mathbf{Q}}\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})/\mathrm{Fil}^0$ l'application linéaire
$$\phi\mapsto\alpha_{\pi,S}(\phi)=\iota^-_{\mathrm{dR},\pi}(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)$$

Alors, dans $\mathbf{C}\otimes(\underrightarrow{H}^1_{\mathrm{dR},c}(W^{\mathrm{dR}}_{k,j})/\mathrm{Fil}^0)$, on a aussi

$$\alpha_{\pi,S}(\phi)=\lambda(\pi)\,w_\infty\star\iota^+_{\mathrm{dR},\pi}(v_\pi^{]S[}\otimes\phi).$$

Théorème 17.3. — *Soient $\eta:\mathbf{Z}_S^*\to L^*$ un caractère localement constant et $\phi\in\pi_S[\eta]$. Alors* [44]

$$\langle \mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}},\exp(\alpha_{\pi,S}(\phi))\otimes\tfrac{(e_2^*)^k}{k!\,(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\rangle_{\text{ét}}=a^{c,d}_\pi(\phi X^{-j})L^{]S[}(f^*_\pi,j)L(v_\pi^{]S[}\otimes\phi X^{-j},0),$$

où :

$$L^{]S[}(f^*_\pi,s)=\sum_{n\geq 1}\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_S^*}(n)\overline{a_n}\,n^{-s},\quad a^{c,d}_\pi(\phi X^\ell)=\lambda(\pi)\,a_{\pi,\infty}(\phi X^\ell)\,a^{c,d}_{\pi,p}(\phi X^\ell).$$

avec [45]

$$\begin{aligned}a_{\pi,\infty}(\phi X^\ell)&=(1+(-1)^{-\ell}\eta(-1))\\ a^{c,d}_{\pi,p}(\phi X^\ell)&=\big(c_p^2-c_p^{-\ell}\eta(c^{-1})\big)\big(d_p^2-d_p^{-\ell-k}\eta(d)\tilde\omega_\pi^{-1}(d)\big)\end{aligned}$$

Remarque 17.4. — On trouvera au cor. 17.8 une formule plus générale.

Démonstration. — On utilise la prop. 17.1 pour faire le calcul. Le facteur $a^{c,d}_{\pi,p}(\phi X^{-j})$ provient du passage de ϕ à $\phi^{c,d}$ dans les notations de cette proposition : si $a\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$, on a

$$\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)=\eta(a)(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)\quad\text{car }\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)^{]S[}\star v_\pi^{]S[}=v_\pi^{]S[}\text{ et }\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)_S\star\phi=\eta(a)\phi.$$

On en déduit, en utilisant le fait que ω_π est le caractère central, que

$$\begin{aligned}&\big(c_p^2-c_p^j\left(\begin{smallmatrix}c^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)\big(d_p^2-d_p^{j-k}\left(\begin{smallmatrix}d^{-1}&0\\0&d^{-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)\star(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)\\ &\qquad=\big(c_p^2-c_p^j\eta(c^{-1})\big)\big(d_p^2-d_p^{j-k}\tilde\omega_\pi^{-1}(d)\eta(d)\big)(v_\pi^{]S[}\otimes\phi).\end{aligned}$$

On continue donc le calcul avec ϕ. On choisit M tel que ϕ soit fixe par $1+M\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_S)$.

• On commence par appliquer le lemme 6.4 avec

$$\Phi_1^{\mathrm{Har}}=\alpha_{\pi,S}(\phi)\quad\text{et}\quad\Phi_2^{\mathrm{Har}}=\widetilde{E}^{(j)}_{0,\frac{1}{M}}\widetilde{F}^{(k+2-j)}_{\frac{1}{M},0}.$$

Pour alléger un peu les notations, on pose :

$$\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle:=\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle_{\mathrm{dR},Y(M)}\otimes\zeta_{\mathrm{dR}}$$

◇ Puisque $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\widetilde{E}^{(j)}_{0,\frac{1}{M}}=\widetilde{E}^{(j)}_{0,\frac{1}{M}}$ et $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\widetilde{F}^{(j)}_{\frac{1}{M},0}=\widetilde{F}^{(j)}_{\frac{a}{M},0}$, on a

$$\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\Phi_2^{\mathrm{Har}}\Big)(\tau,1^{]\infty[})=(-2i\pi)^{j+1}E^{(j)}_{0,\frac{1}{M}}F^{(k+2-j)}_{\frac{a}{M},0}\otimes\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^{k-j}}d\tau.$$

◇ Comme on l'a vu plus haut, si $a\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$, alors

$$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\big(v_\pi^{]S[}\otimes\phi\big)=\tilde\omega_\pi(a)\eta(a^{-1})\big(v_\pi^{]S[}\otimes\phi\big)$$

44. Voir le cor. 17.8 pour une formule plus générale, mais une preuve plus détournée.
45. On voit η comme un caractère de $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ via la projection naturelle $\widehat{\mathbf{Z}}^*\to\mathbf{Z}_S^*$.

On en déduit que

$$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)^{]\infty[}\star\Phi_1^{\mathrm{Har}}=\tilde\omega_\pi(a)\eta^{-1}(a)\Phi_1^{\mathrm{Har}}.$$

$\diamond$ On obtient donc, grâce au lemme 6.4,

$$\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle=\tfrac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(M)\backslash\mathscr{H}^+}\Phi_1^{\mathrm{Har}}(\tau,1^{]\infty[})\wedge\big((-2i\pi)^{j+1}E^{(j)}_{0,\frac{1}{M}}F^{(k+2-j)}_{M,\tilde\omega_\pi\eta^{-1}}\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^{k-j}}d\tau\big),$$

où, si $\chi:(\mathbf{Z}/M)^*\to\mathbf{C}^*$ est un caractère de Dirichlet, on a posé

$$F^{(k+2-j)}_{M,\chi}=\sum_{a\in(\mathbf{Z}/M)^*}\chi(a)F^{(k+2-j)}_{\frac{a}{M},0},$$

et, d'après le lemme 7.3,

$$\Phi_1^{\mathrm{Har}}(\tau,1^{]\infty[})=\eta(-1)\lambda(\pi)(2i\pi)^{k+1-j}f_\phi(-\overline{\tau})\otimes\tfrac{(\overline{\tau}e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\overline{\tau}$$

avec

$$f_\phi=\sum_{n\in\mathbf{Q},\,n>0}n^{k+1-j}(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)(n^{]\infty[})\,\mathbf{e}_\infty(-n\tau).$$

• Ensuite, on applique la prop. 17.2 à

$$s=k+1,\quad f=f_\phi,\quad g=F^{(k+2-j)}_{M,\chi},\quad\text{avec }\chi=\tilde\omega_\pi\eta^{-1}.$$

$\diamond$ On a

$$\begin{aligned}L(f,s)&=\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]_+^*}\tfrac{\phi(n_S)}{n^{s-(k+1-j)}}\Big)L^{]S[}(f_\pi\otimes\eta,s)\\&=\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]_+^*}\tfrac{\phi(n_S)}{n^{s-(k+1-j)}}\Big)\prod_{\ell\notin S}\big(1-\tfrac{a_\ell\eta(\ell)}{\ell^s}+\tfrac{\tilde\omega_\pi^{-1}(\ell)\eta^2(\ell)\ell^{k+1}}{\ell^{2s}}\big)^{-1}\end{aligned}$$

qui se factorise sous la forme voulue, avec $a_n=n^{k+1-j}\phi(n_S)$ si $n\in\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]_+^*$.

$\diamond$ On déduit de la prop. 16.3 l'identité

$$L(g,s)=c(\eta)M^{s-(k+1-j)}\zeta(s)L^{]S[}(\chi,s-(k+1-j)),$$

avec

$$c(\eta)=1+(-1)^{k-j}\tilde\omega_\pi(-1)\eta(-1)=a_{\pi,\infty}(\phi X^{-j}).$$

qui fournit une factorisation sous la forme voulue, avec $\beta_{\ell,1}=1$ et $\beta_{\ell,2}=\chi(\ell)\ell^{k+1-j}$, et $b_n=c(\eta)M^{j-k-1}$, si $n\in\frac{1}{M}\mathbf{N}\cap\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]_+^*$.

$\diamond$ En utilisant les identités

$$\big(\tfrac{(\overline{\tau}e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^j}d\overline{\tau}\big)\wedge\big(\tfrac{(\tau e_2-e_1)^k}{(e_1\wedge e_2)^{k-j}}d\tau\big)=-(-2i)^{k+1}y^{k+2}\tfrac{dx\wedge dy}{y^2},$$

$$E^{(j)}_{0,\frac{1}{M}}=\tfrac{(j-1)!}{(-2i\pi)^j}E^{(j,k+1)}_{0,\frac{1}{M}},\qquad\tfrac{-(-2i)^{k+1}\Gamma(k+1)}{(4\pi)^{k+1}}=\tfrac{-k!}{(2i\pi)^{k+1}}$$

on en tire, grâce à la prop. 17.2,

$$\begin{aligned}\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle&=\tfrac{1}{2i\pi}\eta(-1)\lambda(\pi)(2i\pi)^{k+1-j}(-2i\pi)^{j+1}\tfrac{(j-1)!}{(-2i\pi)^j}\tfrac{-k!}{(2i\pi)^{k+1}}M^{1+j}D(f,g,k+1)\\&=\eta(-1)\lambda(\pi)k!\tfrac{(j-1)!}{(2i\pi)^j}M^{1+j}D(f,g,k+1)\end{aligned}$$

• Par ailleurs, les factorisations de $L(f,s)$ et $L(g,s)$ ci-dessus nous donnent :

$$D(f,g,s)=c(\eta)M^{j-k-1}L(f_\phi,s)L^{]S[}((f_\pi\otimes\eta)\otimes\eta^{-1}\tilde\omega_\pi,s-(k+1-j)),$$

ce que l'on peut réécrire, en utilisant les relations

$$f_\pi\otimes\tilde\omega_\pi=f_\pi^*,\quad L(f_\phi,s)=L(v_\pi^{]S[}\otimes\phi,s-(k+1-j))=(2i\pi)^jL(v_\pi^{]S[}\otimes\phi X^{-j},s-(k+1)),$$

sous la forme

$$D(f,g,s)=(2i\pi)^jc(\eta)M^{j-k-1}L(v_\pi^{]S[}\otimes\phi X^{-j},s-(k+1))L^{]S[}(f_\pi^*,s-(k+1-j)).$$

On en tire

$$\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle=\eta(-1)c(\eta)\lambda(\pi)k!(j-1)!M^{2j-k}L^{]S[}(f_\pi^*,j)L(v_\pi^{]S[}\otimes\phi X^{-j},0).$$

Le résultat s'en déduit en utilisant l'identité $(-1)^j\eta(-1)c(\eta)=a_{\pi,\infty}(\phi X^{-j})$ et la prop. 17.1 ; le $k!$ disparaît car on utilise $\frac{(e_2^*)^k}{k!(e_1^*\wedge e_2^*)^j}$ (qui correspond à X^{-j} dans le modèle de Kirillov de π_p^{alg}) au lieu de $\frac{(e_2^*)^k}{(e_1^*\wedge e_2^*)^j}$. □

17.2. Factorisation du système de Beilinson-Kato

17.2.1. Les fonctionnelles $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\check m_{\text{ét}}(\pi))$ *et* $\mathbf{z}^S(\check m_{\text{ét}}(\pi))$.— Soit π une représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, cohomologique, Π_p-compatible, de poids $(k+2,j+1)$ avec $0\le j\le k$.

• *L'élément* $\mathbf{z}^S(\check m_{\text{ét}}(\pi))$.— On note

$$\check m_{\text{ét}}(\pi):=m_{\text{ét}}^*(\pi)(1)=m_{\text{ét}}(\check\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{-2})$$

la duale de Tate de $m_{\text{ét}}(\pi)$. On a aussi

$$\check m_{\text{ét}}(\pi)\cong\rho_{f_\pi^*}^*\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_p^{1-j}=\rho_{f_\pi}\otimes\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+2-j}.$$

Comme $m(\check\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{-2})^*=m(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}$, on dispose de

$$\mathbf{z}^S(\check m_{\text{ét}}(\pi))\in\check m_{\text{ét}}(\pi)^*\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},\check m_{\text{ét}}(\pi))=m(\pi)\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}\otimes H^1(G_{\mathbf{Q},S},\check m_{\text{ét}}(\pi))$$

• *L'élément* $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\check m_{\text{ét}}(\pi))$.— On a une application naturelle

$$H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Q}_p(2)))\to H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\mathbb{G},\mathrm{Mes}_L)_S(2))$$

En effet, $H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Q}_p))=H^1(\Pi_{\overline{\mathbf{Q}},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),\mathbf{Q}_p))$ par le lemme de Shapiro et le membre de droite s'injecte dans $H^1(\Pi_{\overline{\mathbf{Q}}},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),\mathbf{Q}_p))$ par inflation. Comme $\Pi_{\overline{\mathbf{Q}}}$ est le complété profini de $\Gamma(1)$ qui est presque libre, on a $H^1(\Pi_{\overline{\mathbf{Q}}},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),\mathbf{Q}_p))=H^1(\Gamma(1),\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),\mathbf{Q}_p))$, et ce dernier groupe est isomorphe à $H^1(\mathbb{G},\mathrm{Mes}_{\mathbf{Q}_p})_S$ par le lemme de Shapiro.

On note encore

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}\in H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\mathbb{G},\mathrm{Mes}_L)_S(2))$$

l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}\in H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\Pi'_{\overline{\mathbf{Q}},S},\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),\mathbf{Q}_p(2)))$ par l'application ci-dessus. Maintenant, $H^1(\mathbb{G},\mathrm{Mes}_L)_S(2)$ est le dual de Tate $H_c^1(\mathbb{G},\mathscr{C}_L)_S$. On dispose d'injections naturelles (cf. n° 14.3.3, du moins si la restriction $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ de $m_{\text{ét}}(\pi)$ à $G_{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas somme de deux caractères, cf. rem. 14.14) :

$$m(\pi)\otimes v_\pi^{]S[}\otimes\pi_S^{\text{alg}}\hookrightarrow m_{\text{ét}}(\pi)\otimes v_\pi^{]S[}\otimes\Pi_S(m_{\text{ét}}^*(\pi))\xrightarrow{\iota_{\pi,S}}\mathbf{Q}(\pi)\otimes H^1_c(\mathbb{G},\mathscr{C}_L)_S,$$

Par dualité, cela fournit une flèche $G_{\mathbf{Q},S}\times\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante

$$\iota_{\pi,S}^*:\mathbf{Q}(\pi)\otimes H^1(\mathbb{G},\mathrm{Mes}_L)_S(2)\to\check{m}_{\text{ét}}(\pi)\otimes\Pi_S^*(m_{\text{ét}}^*(\pi)),$$

On note

$$\mathbf{z}_{\text{Kato}}^{S,c,d}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi))\in H^1(G_{\mathbf{Q},S},\check{m}_{\text{ét}}(\pi)\otimes\Pi_S^*(m_{\text{ét}}^*(\pi)))=H^1(G_{\mathbf{Q},S},\check{m}_{\text{ét}}(\pi))\otimes\Pi_S^*(m_{\text{ét}}^*(\pi))$$

l'image, par $\iota_{\pi,S}^*$, de $\mathbf{z}_{\text{Kato}}^{S,c,d}\in H^1(G_{\mathbf{Q},S},H^1(\mathbb{G},\mathrm{Mes}_L)_S(2))$.

17.2.2. La fonctionnelle $(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}$

- *Les opérateurs $B_p^{c,d}$, B_∞, $A_{\pi,p}^{c,d}$ et A_∞.*— Soient $B_p^{c,d}$ et B_∞ les opérateurs

$$B_p^{c,d}=\big(c_p^2-\big(\begin{smallmatrix}c&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big)\big(d_p^2-\big(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\big)\big)\quad\text{et}\quad B_\infty=\tfrac12\big(1+\big(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\big).$$

Les opérateurs adjoints $(B_p^{c,d})^*$ et B_∞^* s'obtiennent en inversant les matrices qui interviennent. Comme $\big(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d^{-1}\end{smallmatrix}\big)=\big(\begin{smallmatrix}d&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}d&0\\0&d\end{smallmatrix}\big)^{-1}$ et comme $\big(\begin{smallmatrix}d&0\\0&d\end{smallmatrix}\big)$ agit par multiplication par $\omega_{\pi^{\text{alg}}}(d)=d_p^{k-2j}\tilde\omega_\pi(d)$, on a

$$(B_p^{c,d})^*=\big(c_p^2-\big(\begin{smallmatrix}c^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big)\big(d_p^2-\tilde\omega_\pi^{-1}(d)d_p^{2j-k}\big(\begin{smallmatrix}d&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)\big),\qquad B_\infty^*=\tfrac12\big(1+\big(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty[}\big)$$

Enfin, soient $A_{\pi,p}^{c,d}$ et A_∞ les opérateurs

$$A_{\pi,p}^{c,d}=\big(c_p^2-\big(\begin{smallmatrix}c_p^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_p\big)\big(d_p^2-\tilde\omega_\pi^{-1}(d)d_p^{2j-k}\big(\begin{smallmatrix}d_p&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_p\big)\qquad A_\infty=\tfrac12\big(1+\big(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)_S\big)$$

- *Les fonctionnelles $(0,\infty)_{\pi,S}$ et $(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}$.*— La restriction de $(0,\infty)$ à $m(\pi)\otimes v_\pi^{]S[}\otimes\Pi_S(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ fournit

$$(0,\infty)_{\pi,S}\in m(\pi)^*\otimes\Pi_S^*(m_{\text{ét}}^*(\pi))$$

On note $(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}$ la fonctionnelle

$$(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}=B_\infty B_p^{c,d}\star(0,\infty)_{\pi,S}$$

sur $m(\pi)\otimes\Pi_S(m_{\text{ét}}^*(\pi))$. Par définition,

$$\langle(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d},\gamma\otimes\phi\rangle=\big\langle(0,\infty),\gamma\otimes\big(B_\infty^*(B_p^{c,d})^*\star(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)\big)\big\rangle.$$

Comme $\big(\begin{smallmatrix}u&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)^{]\infty,p[}$ fixe $v_\pi^{]S[}$, si $u\in\widehat{\mathbf{Z}}^*$, on a

$$B_\infty^*(B_p^{c,d})^*\star(v_\pi^{]S[}\otimes\phi)=v_\pi^{]S[}\otimes(A_\infty A_{\pi,p}^{c,d}\star\phi)$$

$$\langle(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d},\gamma\otimes\phi\rangle=\langle(0,\infty)_{\pi,S},\gamma\otimes(A_\infty A_{\pi,p}^{c,d}\star\phi)\rangle\tag{17.5}$$

17.2.3. Factorisation en un point classique. — Remarquons que

$$m(\check{\pi}) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2 \hookrightarrow m_{\text{ét}}(\check{\pi}) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2 = m_{\text{ét}}^*(\pi)(-1) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2 = \check{m}_{\text{ét}}(\pi).$$

Théorème 17.6. — *On suppose que*[46] $L^{]S[}(f_\pi^*, j) \neq 0$. *Alors, pour tous* $\gamma \in m(\pi)$ *et* $\check{\gamma} \in m(\check{\pi})$, *on a l'identité suivante dans* $H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \check{m}_{\text{ét}}(\pi)) \otimes \Pi_S^*(m_{\text{ét}}^*(\pi))$,

$$(\langle \check{\gamma}^-, \gamma^+ \rangle_{\mathrm{B}} \otimes \zeta_{\mathrm{B}}) \cdot \mathbf{z}_{\text{Kato}}^{S,c,d}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi)) = \langle \mathbf{z}^S(\check{m}_{\text{ét}}(\pi)), \check{\gamma} \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2 \rangle \otimes \langle (0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}, \gamma \rangle.$$

Démonstration. — On va démontrer le résultat dans le cas où $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ est irréductible. Le cas général s'en déduit par prolongement analytique, cf. (ii) de la rem. 17.11. On fait les calculs dans le modèle de Kirillov de π_S^{alg} dans lequel $\phi \otimes \frac{(e_2^*)^k}{k!(e_1^* \wedge e_2^*)^j}$ devient ϕX^{-j}.

- L'hypothèse d'irréductibilité de $m_{\text{ét}}(\pi)_p$ implique que le sous-espace de π_p^{alg} des ϕX^{-j}, pour $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p^*, \mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}))^{\mathbf{Z}_p^*}$, est dense dans $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$: en effet, il est stable par $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_p)$ et $\Pi_p(m_{\text{ét}}^*(\pi))$ est topologiquement irréductible comme $\mathbb{B}(\mathbf{Q}_p)$-module (cf. [**13**], cor. II.2.9 et [**12**], cor. IV.5.6).
- L'hypothèse $L^{]S[}(f_\pi^*, j) \neq 0$ implique, d'après [**42**], que $H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \check{m}_{\text{ét}}(\pi))$ est de dimension 1 et s'injecte dans $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \check{m}_{\text{ét}}(\pi))$. Ce dernier espace est le dual de $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, m_{\text{ét}}(\pi))$ qui contient $\exp(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^-)$. Il suffit donc de vérifier le même énoncé en remplaçant $\mathbf{z}_{\text{Kato}}^{S,c,d}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi))$ et $\mathbf{z}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi))$ par leurs restrictions à $G_{\mathbf{Q}_p}$, et il suffit alors de vérifier l'égalité souhaitée par accouplement avec $\exp(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^-) \otimes \phi$, avec $\phi = \phi_0 X^{-j}$ et $\phi_0 \in \pi_S$.
- Par linéarité, on peut supposer de plus que $\phi_0 \in \pi_S[\eta]$, où η est un caractère localement constant de $\mathbf{Z}_S^*$. Dans ce cas, on a $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)_S \star \phi = \eta(u) u^{-j} \phi$ si $u \in \mathbf{Z}_S^*$; il en résulte que (cf. th. 17.3 pour $a_{\pi,\infty}(\phi)$ et $a_{\pi,p}^{c,d}(\phi)$)

$$A_\infty \star \phi = \tfrac{1}{2}\, a_{\pi,\infty}(\phi)\, \phi, \quad A_{\pi,p}^{c,d} \star \phi = a_{\pi,p}^{c,d}(\phi)\, \phi. \tag{17.7}$$

- D'après le th. 17.3,

$$\begin{aligned} \big\langle \mathbf{z}_{\text{Kato}}^{S,c,d}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi)), \exp(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^-) \otimes \phi \big\rangle &= \big\langle \mathbf{z}_{\text{Kato}}^{S,c,d}, \exp(\alpha_{\pi,S}(\phi_0) \otimes \tfrac{(e_2^*)^k}{k!(e_1^* \wedge e_2^*)^j}) \big\rangle \\ &= a_\pi^{c,d}(\phi) L^{]S[}(f_\pi^*, j) L(v_\pi^{]S[} \otimes \phi, 0). \end{aligned}$$

- D'un autre côté,

$$\begin{aligned} &\big\langle \langle \mathbf{z}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi)), \check{\gamma} \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2 \rangle \otimes \langle (0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}, \gamma \rangle, \exp(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^-) \otimes \phi \big\rangle \\ &\qquad = \big\langle \langle \mathbf{z}(\check{m}_{\text{ét}}(\pi)), \check{\gamma} \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2 \rangle, \exp(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^-) \big\rangle \, \big\langle (0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}, \gamma \otimes \phi \big\rangle \end{aligned}$$

- Il résulte des formules (17.5) et (17.7) que

$$\big\langle (0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}, \gamma \otimes \phi \big\rangle = a_{\pi,\infty}(\phi)\, a_{\pi,p}^{c,d}(\phi)\, \big\langle (0,\infty)_{\pi,S}, \gamma \otimes \phi \big\rangle.$$

46. C'est automatique si $j \neq \frac{k}{2} + 1$ (centre de la bande critique) et si $j \neq \frac{k+1}{2}$ (où les facteurs d'Euler en $\ell \in S$ peuvent s'annuler).

En particulier, si $(-1)^j\eta(-1) = -1$, alors $a_{\pi,\infty}(\phi) = 0$ et les deux membres de l'identité à vérifier sont nuls. On suppose donc $(-1)^j\eta(-1) = 1$ dans ce qui suit (et donc $a_{\pi,\infty}(\phi) = 2$, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait).

Le cor. 14.7 fournit (cf. formule (14.16), la condition $(-1)^j\eta(-1) = 1$ implique que $\phi = \phi^+$) l'identité

$$\big\langle (0,\infty)_{\pi,S}, \gamma\otimes\phi\big\rangle = \Omega_\pi^+(\gamma) L(v_\pi^{]S[}\otimes\phi, 0)$$

• Enfin, on déduit de la prop. 14.12 utilisée pour $\check\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{-2}$ au lieu de π (ce qui change j en $k+2-j$), et pour $\phi = \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}$ et $r=0$, que

$$\begin{aligned}\big\langle \langle \mathbf{z}^S(\check m_{\text{ét}}(\pi)), \check\gamma\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^2\rangle, \exp(\iota_{\mathrm{dR},\pi}^-)\big\rangle &= \big\langle \exp^*\big(\langle \mathbf{z}^S(\check m_{\text{ét}}(\pi)), \check\gamma\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^2\rangle\big), \iota_{\mathrm{dR},\pi}^-\big\rangle \\ &= (2i\pi)^{-1}\Omega^-_{\check\pi\otimes|\ |_{\mathbf{A}}^{-2}}(\check\gamma\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^2) L^{]S[}(f_\pi^*, j) \\ &= 2i\pi\,\Omega_{\check\pi}^-(\check\gamma) L^{]S[}(f_\pi^*, j)\end{aligned}$$

(On obtient $L^{]S[}(f_\pi^*, j)$ grâce au lien entre $\mathbf{z}^S$ et $\mathbf{z}$, cf. prop. 15.3, rem. 3.28 et note 39. Le passage de la deuxième ligne à la troisième utilise le lemme 7.7.)

• Le lemme 7.4, selon lequel $\Omega_{\check\pi}^-(\check\gamma)\Omega_\pi^+(\gamma) = 2\frac{\lambda(\pi)}{2i\pi}(\langle\check\gamma^-, \gamma^+\rangle_{\mathrm{B}}\otimes\zeta_B)$, fournit l'identité

$$\begin{aligned}\Omega_\pi^+(\gamma)(2i\pi)\Omega_{\check\pi}^-(\check\gamma)\,\tfrac12\, a_{\pi,\infty}(\phi) a_{\pi,p}^{c,d}(\phi) &= 2(\langle\check\gamma^-, \gamma^+\rangle_{\mathrm{B}}\otimes\zeta_B)\,\lambda(\pi)\,\tfrac12\, a_{\pi,\infty}(\phi) a_{\pi,p}^{c,d}(\phi) \\ &= (\langle\check\gamma^-, \gamma^+\rangle_{\mathrm{B}}\otimes\zeta_B) a_\pi^{c,d}(\phi)\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. □

Corollaire 17.8. — *Si $\phi\in\pi_S[\eta]$, et si $0\le\ell\le k$, alors*

$$\langle \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}, \exp(\alpha_{\pi,S}(\phi))\otimes \tfrac{(e_1^*)^\ell(e_2^*)^{k-\ell}}{(k-\ell)!\,(e_1^*\wedge e_2^*)^j}\rangle_{\text{ét}} = a_\pi^{c,d}(\phi X^{\ell-j}) L^{]S[}(f_\pi^*, j) L(v_\pi^{]S[}\otimes\phi X^{\ell-j}, 0),$$

Démonstration. — Cela résulte de la formule (14.16) pour $\big\langle (0,\infty), \gamma\otimes v_\pi^{]S[}\otimes\phi X^{\ell-j}\big\rangle$. □

17.2.4. Factorisation en famille. — Soit T' la localisée de $T(Np^\infty)$ correspondant à $\rho_T^\diamond(2)$, et $\mathscr{X}' = \operatorname{Spec}(T')$. L'application $\rho\mapsto\rho\otimes(\det\rho)^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}^2$ induit des isomorphismes $\mathscr{X}\cong\mathscr{X}'$, et $T'\cong T$, ce qui permet de voir tous les objets attachés à $\rho_{T'} = \rho_T^\diamond(2)$ comme des T-modules. On note $H_c^1[\rho_T^\diamond(2)]_S\subset H_c^1[\rho_T^\diamond(2)]$ le sous-$\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$-module correspondant à $\rho_T^\diamond(1)\otimes_T v_T^{]S[}\otimes_T\Pi_S(\rho_T(-1))$ dans la factorisation du th. 13.11. On note

$$(0,\infty)_{T',S},\ (0,\infty)_{T',S}^{c,d}\in\rho_T(-1)\otimes_T\Pi_S^*(\rho_T(-1))$$

les restrictions de $(0,\infty)$ et $\big(B_\infty B_p^{c,d}\star(0,\infty)\big)$ à $\rho_T^\diamond(1)\otimes_T v_T^{]S[}\otimes_T\Pi_S(\rho_T(-1))$.

Par dualité, la factorisation fournit une flèche

$$H^1(\mathbb{G}, \mathrm{Mes}_L)_S(2)\to(\rho_T^\diamond(1)\otimes_T\Pi_S(\rho_T(-1)))^*(1) = \rho_T\otimes_T\Pi_S^*(\rho_T(-1))$$

qui est $G_{\mathbf{Q},S}\times\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$-équivariante. On note

$$\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\rho_T)\in H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T\otimes_T\Pi_S^*(\rho_T(-1)))\cong H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T)\otimes_T\Pi_S^*(\rho_T(-1))$$

l'image de $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}$.

Rappelons (cf. rem. 15.29) que l'on a défini

$$\mathbf{z}^S(\rho_T) \in \mathrm{Fr}(T) \otimes_T (\rho_T^\diamond \otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T))$$

Lemme 17.9. — *Pour tous* $\check{\gamma} \in \rho_T$, $\gamma \in \rho_T^\diamond(1)$ *et* $v \in \Pi_S^*(\rho_T(-1))^\diamond$, *on a*

$$(\langle \check{\gamma}^-, \gamma^+ \rangle \otimes \zeta_{\mathrm{B}}) \langle \mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\rho_T), v\rangle = \langle (0,\infty)_{T',S}^{c,d}, \gamma \otimes v\rangle \langle \mathbf{z}^S(\rho_T), \check{\gamma}\rangle.$$

Démonstration. — Les deux membres appartiennent à $\mathrm{Fr}(T) \otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T)$, qui est un $\mathrm{Fr}(T)$-module de rang 1. Si $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl},+}$ n'est pas un pôle, on peut tout réduire modulo $\mathfrak{p}_x$. Si $\rho_x = \check{m}_{\mathrm{ét}}(\pi)$, où π est cohomologique, alors

- $\gamma(x) \in \check{m}_{\mathrm{ét}}(\pi)^* \otimes \zeta_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{ét}}(\pi)$,
- $\check{\gamma}(x) \in \check{m}_{\mathrm{ét}}(\pi) = (\mathbf{Q}_p \otimes m(\check{\pi})) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^2$,
- $v(x) \in \Pi_S(m_{\mathrm{ét}}^*(\pi))$ car $v(x)$ est l'image de v par

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_T(\Pi_S^*(\rho_T(-1)), T) \to \mathrm{Hom}_T(\Pi_S^*(\rho_T(-1)), T/\mathfrak{p}_x) &= \mathrm{Hom}(\Pi_S^*(\rho_T(-1)), L)[\mathfrak{p}_x] \\ &= \Pi_S(\rho_T(-1))[\mathfrak{p}_x] = \Pi_S(m_{\mathrm{ét}}^*(\pi)).\end{aligned}$$

- $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\rho_T)$ se spécialise en $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}^{S,c,d}(\check{m}_{\mathrm{ét}}(\pi))$,
- $(0,\infty)_{T',S}^{c,d}$ se spécialise en $(0,\infty)_{\pi,S}^{c,d}$.

D'après le th. 17.6, la différence des deux membres est donc nulle en tout $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl},+}$, de poids $(k+2, j+1)$ avec $1 \le j \le k+1$, mais $j \ne \frac{k}{2}+1, \frac{k+1}{2}$ (cf. note 46), et qui n'est pas un pôle de $\mathbf{z}^S(\rho_T)$. Comme ces points sont zariski-denses dans $\mathscr{X}$, cela prouve que la différence est nulle. □

Théorème 17.10. — (i) $\mathbf{z}^S(\rho_T) \in \rho_T^\diamond \otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T)$.

(ii) *Si x est un point classique x, et si $\mathbf{z}(\rho_x)$ est l'élément de Kato du n° 14.3.4. la spécialisation de $\mathbf{z}^S(\rho_T)$ en x est $\big(\prod_{\ell \in S\setminus\{p\}} P_\ell(1)\big)\mathbf{z}(\rho_x)$, où P_ℓ est le polynôme de la rem. 3.28.*

Démonstration. — Compte-tenu du lemme 17.9, il suffit, pour démontrer le (i), de prouver que, si $x \in \mathscr{X}$, on peut trouver v, γ, c, d tels que $\langle (0,\infty)_{T',S}^{c,d}, \gamma \otimes v\rangle$ ne s'annule pas en x. Dans le cas contraire, on a

$$\big\langle (0,\infty), \gamma \otimes ((B_p^{c,d})^* \star v)\big\rangle = 0, \quad \text{avec } B_p^{c,d} = \big(c_p^2 - \left(\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\big)\big(d_p^2 - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\big),$$

pour tous $\gamma \in \rho_x$ et $v \in \Pi_S(\rho_x)$ et $c, d \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$. Comme $p \ne 2$, le groupe $\mathbf{Z}_p^*$ est procyclique ; prenons donc $c \in \mathbf{Z}_p^* \subset \widehat{\mathbf{Z}}^*$ un générateur de $\mathbf{Z}_p^*$ et $d = c^{-1}$. Alors

$$(B_p^{c,d})^* \star (\otimes_{\ell \in S} v_\ell) = \big(\otimes_{\ell \in S\setminus\{p\}} v_\ell\big) \otimes ((B_p^{c,d})^* \star v_p).$$

Maintenant, si $\rho_{x,p}$ est irréductible ou, plus généralement, si $\rho_{x,p}$ n'a pas de quotient non nul sur lequel l'inertie agit par $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}^{-1}$ ou par $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}}^2 \det \rho_{x,p}$, le sous-espace engendré par les $(B_p^{c,d})^* \star v_p$ est dense dans $\Pi_p(\rho_x)$ (cf. lemme 2.5). On en déduit que $(0,\infty)$ est identiquement nul sur $\Pi_S(\rho_x^*)$, ce qui contredit le théorème d'Ash-Stevens [**2**] (pour les coefficients constants) dont une conséquence est qu'un sous-espace fermé de

$H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}_L)_S$, qui est stable par $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ (en fait, $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S)$ suffit) et tué par $(0,\infty)$, est nul.

Il s'ensuit que les pôles éventuels de $\mathbf{z}^S(\rho_T)$ sont de codimension au moins 2 (la condition que $\rho_{x,p}$ est non irréductible implique que x est dans le lieu ordinaire de $\mathscr{X}$, qui est de codimension 1 ; la condition que l'un des caractères soit comme ci-dessus est de codimension 1 dans le lieu ordinaire car une des dimensions du lieu ordinaire est la torsion par un caractère). Comme $\mathscr{X}$ est fini et plat au-dessus d'une boule [(47)] de dimension 3, il en résulte que $\mathbf{z}^S(\rho_T)$ n'a pas de pôle.

Ceci prouve le (i). Le (ii) est alors une conséquence du th. 17.6. $\square$

Remarque 17.11. — (i) Il résulte du lemme 17.9 que la projection naturelle $\rho_T(-1)\otimes_T \rho_T^\diamond \to T\otimes\zeta_{\mathrm{B}}^{-1}$ induit une factorisation dans $\Pi_S^*(\rho_T(-1))\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T)$:

$$\mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}}(\rho_T) \otimes \zeta_{\mathrm{B}}^{-1} = (0,\infty)^{c,d}_{T',S} \otimes \mathbf{z}^S(\rho_T)$$

(ii) Une spécialisation de la factorisation du (i) en un point classique général x permet de terminer la preuve du th. 17.6 (qui n'avait été faite que sous l'hypothèse $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{cl},+}$).

(iii) On peut diviser $\mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}}(\rho_T)$ par le facteur $B_p^{c,d}$ que l'on avait dû introduire pour rendre $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}$ entier (cf. n° 16.2.3). En effet, si on pose

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Kato}}(\rho_T) := (B_\infty \star (0,\infty)_{T',S}) \otimes \mathbf{z}^S(\rho_T) \otimes \zeta_B,$$

alors, dans $\Pi_S^*(\rho_T(-1))\otimes_T H^1(G_{\mathbf{Q},S}, \rho_T)$, on a la relation $\mathbf{z}^{S,c,d}_{\mathrm{Kato}}(\rho_T) = B_p^{c,d}\star\mathbf{z}^S_{\mathrm{Kato}}(\rho_T)$ grâce à la relation $(0,\infty)^{c,d}_{T',S} = B_p^{c,d} \star (B_\infty \star (0,\infty)_{T',S})$ et au (i).

(iv) Posons, comme dans la rem. 15.32,

$$\mathbf{z}^S_{\mathrm{Kato}}(\Lambda\otimes\rho_T) = \iota^{\mathrm{semi}}(\mathbf{z}^S_{\mathrm{Kato}}(\rho_T)).$$

On a une factorisation de $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Kato}}(\Lambda\otimes\rho_T)$ analogue à la factorisation ci-dessus avec $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ au lieu de $\mathbf{z}^S(\rho_T)$. Or la localisation en p de $\mathbf{z}^S_{\mathrm{Iw}}(\rho_T)$ s'identifie par construction, modulo les identifications habituelles, à $(0,\infty)_{T,S}$. La factorisation ci-dessus devient donc

$$\mathrm{loc}_p(\mathbf{z}^S_{\mathrm{Kato}}(\Lambda\otimes\rho_T)) = B_\infty \star \big((0,\infty)_{T',S} \otimes (0,\infty)_{T,S}\big),$$

formule que l'on peut voir comme un avatar algébrique du produit de Rankin. (Le $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)_S$ intervenant dans B_∞ agit sur les deux facteurs : pour que les périodes se combinent pour donner des nombres algébriques, il faut que les deux fonctions soient paires ou soient impaires.)

Index

47. C'est un sous-produit des théorèmes « big R = big T », cf. [**6**, th. 3.1] et [**27**, § 7.3] pour l'extension des méthodes de [**6**].

Références

[1] F. Andreatta, A. Iovita, G. Stevens, Overconvergent Eichler-Shimura isomorphisms, J. Inst. Math. Jussieu **14** (2015), 221–274. 113

[2] A. Ash, G. Stevens, Modular forms in characteristic ℓ and special values of their L-functions, Duke Math. J. **53** (1986), 849–868. 13, 181

[3] L. Berger, Représentations de de Rham et normes universelles, Bull. Soc. Math. France **133** (2005), 601–618. 139

[4] L. Berger, C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 155–211. 7

[5] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque **319** (2008), 303–337. 24

[6] G. Böckle, On the density of modular points in universal deformation spaces, Amer. J. Math. **123** (2001), 985–1007. 4, 49, 182

[7] A. Caraiani, D. Gulotta, C. Johansson, Vanishing theorems for Shimura varieties at unipotent level, J. EMS **25** (2023), 869–911. 113

[8] H. Carayol, Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. ENS **19** (1986), 409–468. 8, 81, 82, 87

[9] F. Cherbonnier, P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. math. **133** (1998), 581–611. 24

[10] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. AMS **12** (1999), 241–268. 10, 25, 26, 153

[11] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, Sém. Bourbaki 2002-2003, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251–319. 11, 172

[12] P. Colmez, (φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153. 27, 154, 179

[13] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509. 4, 8, 10, 24, 27, 28, 30, 33, 117, 121, 122, 179

[14] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations Vol. 1*, London Math. Soc. Lect. Note Series **415** (2014), 286–358. 121

[15] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. EMS **21** (2019), 797–838. 10, 27, 28, 121, 122

[16] P. Colmez, Exercices adéliques, `arXiv:2402.16231[math.NT]`, preprint 2024. 50

[17] P. Colmez, G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519. 24, 26, 30

[18] P. Colmez, G. Dospinescu, W. Nizioł, Cohomologie des courbes analytiques p-adiques, Cambridge J. Math. **10** (2022), 511–655. 108

[19] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge Math. J. **2** (2014), 1–47. 24, 117, 121

[20] J. Dee, (φ,Γ)-modules for families of Galois representations, J. Algebra **235** (2001), 636–664. 153

[21] F. Diamond, M. Flach, L. Guo, The Tamagawa number conjecture of adjoint motives of modular forms, Ann. ENS **37** (2004), 663–727. 49

[22] H. Diao, K.-W. Lan, R. Liu, X. Zhu, Logarithmic Riemann-Hilbert correspondences for rigid varieties, J. AMS **36** (2023), 483–562. 79

[23] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657. 27, 122

[24] M. Emerton, p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, Duke Math. J. **130** (2005), 353–392. 9

[25] M. Emerton, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, Invent. math. **164** (2006), 1–84. 3, 8, 56, 81

[26] M. Emerton, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure and Applied Math. Quarterly **2** (2006), 279–393. (special issue in honour of John Coates' 60th birthday). 6, 8, 56, 81, 87

[27] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2008 ! 4, 5, 7, 8, 22, 34, 45, 60, 119, 121, 122, 123, 130, 182

[28] M. Emerton, D. Helm, The local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_n$ in families, Ann. ENS **47** (2014), 655–722. 4, 34, 38, 45

[29] G. Faltings, Hodge-Tate structures and modular forms, Math. Ann. **278** (1987), 133–149. 113

[30] L. Fargues, Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification, Duke Math. J. **140** (2007), 499–590. 109

[31] L. Fargues, La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats, J. Reine Angew. Math. **645** (2010), 1–39. 109

[32] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque **295** (2004), 1–115. 10

[33] O. Fouquet, X. Wan, The Iwasawa Main Conjecture for universal families of modular motives, `arXiv:2107.13726[math.NT]`, preprint 2022. 49

[34] J. Fresnel, Produit tensoriel topologique des corps valués. Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1976-1977, exp. n$^{\mathrm{o}}$ 30, 26 pp. 101

[35] J. Fresnel, B. de Mathan, Produit tensoriel topologique de corps valués, Groupe de travail d'analyse ultramétrique 1976-1977, exp. n$^{\mathrm{o}}$ 24, 6pp. 101

[36] J. Fresnel, B. de Mathan, Algèbres L^1 p-adiques, Bull. SMF **106** (1978), 225–260. 101

[37] B. Gross, A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod p), Duke Math. J. **61** (1990), 445–517. 110, 111

[38] D. Helm, On the modified mod p local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$, Math. Res. Lett. **20** (2013), 489–500. 34

[39] D. Helm, G. Moss, Converse Theorems and the local Langlands correspondence in families, Invent. Math. **214** (2018), 999–1022. 45

[40] S. Howe, Overconvergent modular forms are highest-weight vectors in the Hodge-Tate weight zero part of completed cohomology, Forum Math. Sigma **9** (2021), e17, 24 pp. 7, 112

[41] K. Kato, Euler systems, Iwasawa theory, and Selmer groups, Kodai Math. J. **22** (1999), 313–372. 160

[42] K. Kato, Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque **295** (2004), 117–290. 9, 11, 13, 137, 138, 157, 165, 172, 179

[43] M. Kisin, Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ representations, Astérisque **330** (2010), 511–528. 4

[44] V. Kolyvagin, Euler systems, *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, 435–483, Progr. Math. **87**, Birkhäuser 1990. 160

[45] D. Kubert, S. Lang, *Modular units*, Grundlehren der Math. Wiss. **244**, Springer–Verlag, 1981. 165

[46] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Ann. E.N.S. **45** (2012), 167–190. 121

[47] K. Nakamura, Local ε-isomorphisms for rank two p-adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system, Camb. J. Math. **5** (2017), 281–368. 10, 141

[48] K. Nakamura, Zeta morphisms for rank two universal deformations, `arXiv:2006.13647[math.NT]`, preprint 2020. 11

[49] A. Ophir, On the rigidity of invariant norms on the p-adic Schrödinger representation, `arXiv:2101.00342[math.NT]`, preprint 2021. 101

[50] L. Pan, The Fontaine-Mazur conjecture in the residually reducible case, J. AMS **35** (2022), 1031–1169. 122

[51] L. Pan, On locally analytic vectors of the completed cohomology of modular curves, Forum Math. Pi **10** (2022), e7, 82 pp. 3, 7, 112, 116, 117, 130

[52] L. Pan, On locally analytic vectors of the completed cohomology of modular curves II, `arXiv:2209.06366[math.NT]`, preprint 2022. 3, 7, 122

[53] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor, Publ. IHES **118** (2013), 1–191. 4, 117, 120, 121

[54] V. Paškūnas, S.-N. Tung, Finiteness properties of the category of mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Forum Math. Sigma **9** (2021), e80, 39 pp. 120

[55] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995). 155, 157

[56] B. Perrin-Riou, Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 1231–1307. 160

[57] J. Rodrigues Jacinto, La conjecture ε locale de Kato en dimension 2, Math. Ann. **372** (2018), 1277–1334. 141

[58] J. E. Rodríguez Camargo, An integral model of the perfectoid modular curve, J. Éc. polytech. **8** (2021), 1193–1224. 101

[59] J. E. Rodríguez Camargo, p-adic Eichler-Shimura maps for the modular curve, Compositio Math. **159** (2023), 1214–1249. 113

[60] K. Rubin, *Euler systems*, Annals of Mathematics Studies **147**, Princeton University Press 2000. 160

[61] P. Scholze, p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, Forum Math. Pi **1** (2013), e1, 77 pp. 79, 91

[62] P. Scholze, On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties, Ann. of Math. **182** (2015), 945–1066. 3, 7, 101, 113

[63] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 783–804. 174

[64] E. Urban, Nearly overconvergent modular forms, *Iwasawa theory 2012*, 401–441, Contrib. Math. Comput. Sci. **7**, Springer 2014. 78

[65] S. Wang, Le système d'Euler de Kato, J. Théor. Nombres Bordeaux **25** (2013), 677–758. 11

[66] M.-F. Vignéras, Représentations modulaires de $\mathrm{GL}(2, F)$ en caractéristique ℓ, F corps p-adique, $\ell \neq p$, Compositio Math. **72** (1989), 33–66. 43

[67] J. Weinstein, Semistable models for modular curves of arbitrary level, Invent. math. **205** (2016), 459–526. 101

[68] G. Wiese, Multiplicities of Galois representations of weight one, Algebra Number Theory **1** (2007), 67–85. 111

[69] Y. Zhou, Completed cohomology and Kato's Euler system for modular forms, `arXiv:1812.03272[math.NT]`, preprint 2018. 10

Pierre Colmez, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

Shanwen Wang, School of mathematics, Renmin University of China, 59 ZhongGuanCun Street, 100872 Beijing, P.R. China • *E-mail :* s_wang@ruc.edu.cn