FONCTIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES SUR $\mathbf{Z}_p$

par

Pierre Colmez & Shanwen Wang

Résumé. — Nous donnons une preuve par dualité du théorème d'Amice sur les coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$.

Abstract. — We give a proof by duality of Amice's result on Mahler coefficients of locally analytic functions on $\mathbf{Z}_p$.

1. Transformée d'Amice et théorème de Mahler

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit $\mathscr{C}$ l'espace des $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ continues. On munit $\mathscr{C}$ de la valuation $v_{\mathscr{C}}$ définie par $v_{\mathscr{C}}(\phi) = \inf_{x\in\mathbf{Z}_p} v_p(\phi)$ (c'est une valuation car $\mathbf{Z}_p$ est compact) ; cela fait de $\mathscr{C}$ un L-banach. On note Mes son dual que l'on munit de la topologie en faisant un L-smith (i.e. la boule unité Mes_0 de Mes est munie de la topologie de la convergence faible et $\mathrm{Mes} = \varinjlim p^{-n}\mathrm{Mes}_0$ est muni de la topologie de la limite inductive) de telle sorte que le dual de Mes est $\mathscr{C}$.

Comme $\mathbf{Z}_p$ est profini, l'espace LC des fonctions localement constantes est dense dans $\mathscr{C}$. Il s'ensuit que Mes_0 est aussi $\mathrm{Hom}(\mathrm{LC}_0, \mathscr{O}_L)$, où LC_0 est la boule unité de LC. Mais $\mathrm{LC} = \varinjlim_h \mathrm{LC}^{(h)}$, où $\mathrm{LC}^{(h)} = \mathscr{C}(\mathbf{Z}/p^h)$, et donc le dual de $\mathrm{LC}^{(h)}$ est $L[\mathbf{Z}/p^h] \cong L[T]/((1+T)^{p^h}-1)$ où $a \in \mathbf{Z}$ s'envoie sur $(1+T)^a$; la boule unité correspondant à $\mathscr{O}_L[T]/((1+T)^{p^h}-1)$. En passant à la limite, on en déduit un isomorphisme $\mathrm{Mes}_0 \cong \mathscr{O}_L[[T]]$, la masse de Dirac δ_a en $a \in \mathbf{Z}_p$ s'envoyant sur $(1+T)^a = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}T^n$. Si $\mu \in \mathrm{Mes}$, on note A_μ son image dans $\mathscr{O}_L[[T]]\big[\frac{1}{p}\big]$; c'est la *transformée d'Amice* de μ.

Mais $\binom{a}{n} = \int_{\mathbf{Z}_p}\binom{x}{n}\delta_a$, et donc $A_{\delta_a} = \sum_{n\geq 0}\big(\int_{\mathbf{Z}_p}\binom{x}{n}\delta_a\big)T^n$ et, comme l'espace engendré par les masses de Dirac est dense dans Mes, la formule ci-dessus est valable pour tout μ :

$$A_\mu = \sum_{n\geq 0}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}\binom{x}{n}\mu\Big)T^n$$

Or T^n correspond à $(\delta_1-\delta_0)^{*n}$, et donc les $(\delta_1-\delta_0)^{*n}$ forment une base orthonormale de Mes. La relation $\binom{x+1}{n}-\binom{x}{n}=\binom{x}{n-1}$ permet de montrer que la base orthonormale de $\mathscr{C}$, duale de la base des $(\delta_1-\delta_0)^{*n}$, est constituée des $\binom{x}{n}$. Si $\phi\in\mathscr{C}$, on a alors $\phi=\sum_{n\geq 0}\big(\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,(\delta_1-\delta_0)^{*n}\big)\binom{x}{n}$. Si on définit les *coefficients de Mahler* de ϕ par :

$$a_n(\phi):=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,(\delta_1-\delta_0)^{*n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\phi(n-k)$$

on obtient le théorème de Mahler [**4**] :

Théorème 1. — (Mahler) *Si $\phi\in\mathscr{C}$, alors $a_n(\phi)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\phi=\sum_{n\geq 0}a_n(\phi)\binom{x}{n}$ et $\phi\mapsto(a_n(\phi))_n$ est une isométrie de $\mathscr{C}$ sur*[1] $\ell_0^\infty(\mathbf{N})$.

Exemple 2. — (i) Si $v_p(z)>0$, alors $x\mapsto(1+z)^x:=\sum_{n\geq 0}z^n\binom{x}{n}$ est un caractère continu de $\mathbf{Z}_p$; ses coefficients de Mahler sont $(z^n)_n$.

(ii) Si $z=\zeta-1$, avec $\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, le caractère $x\mapsto(1+z)^x=\zeta^x$ est localement constant, et les $x\mapsto\zeta^x$ pour $\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$ forment une base de l'espace des fonctions localement constantes. Par exemple, $\mathbf{1}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(x)=\frac{1}{p^n}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\zeta^{-i}\zeta^x$.

Remarque 3. — On dispose d'un certain nombre d'actions naturelles sur l'espace de mesures. Par transport de structure, celles-ci induisent des actions sur $\mathscr{O}_L[[T]]$.

• $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\in\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p\setminus\{0\}&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ agit par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mu=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(ax+b)\,\mu(x)$. Si $\lambda=\left(\begin{smallmatrix}p^ka&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\mu$, avec $k\geq 0$ et $a\in\mathbf{Z}_p^*$, on a $A_\lambda=(1+T)^b\varphi^k(\sigma_a(A_\mu))$, avec

$$(\varphi(F))(T)=F((1+T)^p-1)\quad\text{et}\quad(\sigma_a(F))(T)=F((1+T)^a-1)$$

• On définit $\psi(\mu)$ par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\psi(\mu):=\int_{p\mathbf{Z}_p}\phi(p^{-1}x)\mu$. Comme $\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}(x)=\frac{1}{p}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_p}\zeta^x$, on a

$$A_{\psi(\mu)}=\psi(A_\mu),\quad\text{avec }(\psi(F))(T):=\varphi^{-1}\big(\tfrac{1}{p}\textstyle\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_p}F((1+T)\zeta-1)\big)$$

Si $\lambda=\mathrm{Res}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}\mu$, avec $h\geq 1$ et $i\in\mathbf{Z}_p$, on a :

$$A_\lambda=(1+T)^i\varphi^h\big(\psi^h((1+T)^{-i}A_\mu)\big)$$

Notons que l'action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p\setminus\{0\}&\mathbf{Z}_p\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ s'étend à $L[[T]]$ mais que celle de ψ ne s'étend qu'au sous-anneau des fonctions convergeant sur la boule fermée $\{z,\ v_p(z)\geq\frac{1}{p-1}\}$ car $v_p(\zeta-1)=\frac{1}{p-1}$ si $\zeta^p=1$ et $\zeta\neq 1$.

2. Le théorème d'Amice

Si $h\geq 0$, soit $\mathrm{LA}^{(h)}$ l'espace des $\phi:\mathbf{Z}_p\to L$, analytiques sur $i+p^h\mathbf{Z}_p$ pour tout $i\in\mathbf{Z}_p$ (ou, de manière équivalente, pour $i\in\{0,1,\dots,p^h-1\}$). En particulier, $\mathrm{LA}^{(0)}$ est l'espace des fonctions de la forme $\phi(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, avec $a_n\to 0$ quand $n\to\infty$; muni de la valuation $v^{(0)}$ définie par $v^{(0)}(\phi)=\inf_{n\geq 0}v_p(a_n)$, $\mathrm{LA}^{(0)}$ est un banach, et

1. Espace des suites d'éléments de L tendant vers 0.

les x^n, pour $n \geq 0$, en forment une base orthonormale. Comme la matrice de passage des $n!\binom{x}{n}$ aux x^n est à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$, triangulaire avec des 1 sur la diagonale, les $n!\binom{x}{n}$ forment aussi une base orthonormale de $\mathrm{LA}^{(0)}$. Le th. 5 ci-dessous généralise ce résultat à $\mathrm{LA}^{(h)}$.

Exemple 4. — (i) Si $v_p(z) > \frac{1}{p-1}$, alors $x \mapsto (1+z)^x$ est élément de $\mathrm{LA}^{(0)}$.

(ii) Si $h \geq 1$ et si $v_p(z) > \frac{1}{(p-1)p^h}$, alors $x \mapsto (1+z)^x$ est élément de $\mathrm{LA}^{(h)}$.

Démonstration. — On a $(1+z)^x = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\, n!\binom{x}{n}$ et le (i) résulte de ce que les $n!\binom{x}{n}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{LA}^{(0)}$ et [2] $v_p\big(\frac{z^n}{n!}\big) \geq \big(v_p(z) - \frac{1}{p-1}\big)n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Pour prouver le (ii), il suffit de prouver que la restriction de $x \mapsto (1+a)^x$ est analytique sur $p^h\mathbf{Z}_p$ (l'analyticité de sa restriction à $i + p^h\mathbf{Z}_p$ en découle immédiatement). Ceci est équivalent à ce que $x \mapsto (1+a)^{p^h x}$ soit analytique sur $\mathbf{Z}_p$. Or cela suit du (i) et de ce que $v_p((1+a)^{p^h} - 1) \geq \inf(1, p^h v_p(a)) > \frac{1}{p-1}$ si $v_p(a) > \frac{1}{(p-1)p^h}$. □

Maintenant, $\phi \in \mathrm{LA}^{(h)}$ s'écrit, de manière unique, $\phi(x) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}\phi_i\big(\frac{x-i}{p^h}\big)$, avec $\phi_i \in \mathrm{LA}^{(0)}$. On en déduit un isomorphisme $(\mathrm{LA}^{(0)})^{\oplus p^h} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LA}^{(h)}$, et on munit $\mathrm{LA}^{(h)}$ de la valuation $v^{(h)}$ telle que cet isomorphisme soit une isométrie. Alors $\mathrm{LA}^{(h)}$, muni de $v^{(h)}$, est un L-banach ; notons $\mathscr{D}^{(h)}$ son L-dual et notons $\mathscr{D}_0^{(h)}$ la boule unité de ce L-smith.

Notre but est de donner une preuve du résultat suivant d'Amice **[1, 2]**, par dualité ; une démonstration directe peut se trouver dans **[3]**.

Théorème 5. — (Amice) *Les* $\lfloor \frac{n}{p^h} \rfloor!\binom{x}{n}$ *forment une base orthonormale de* $\mathrm{LA}^{(h)}$.

Démonstration. — Le résultat est immédiat pour $h = 0$, comme expliqué ci-dessus. Si $h \geq 0$, soit $\mathscr{O}_L[T]^{(h)} \subset L[[T]]$ l'ensemble des $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{T^n}{\lfloor n/p^h \rfloor!}$, avec $a_n \in \mathscr{O}_L$ pour tout n. Alors $\mathscr{O}_L[T]^{(h)}$ est un sous-anneau [3] de $L[[T]]$. Par dualité, l'énoncé du théorème équivaut à ce que $\mu \mapsto A_\mu$ induise un isomorphisme $\mathscr{D}_0^{(h)} \cong \mathscr{O}_L[T]^{(h)}$.

L'isomorphisme $(\mathrm{LA}^{(0)})^{\oplus p^h} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LA}^{(h)}$ induit, par dualité, une décomposition de A_μ pour $\mu \in \mathscr{D}^{(h)}$, de manière unique, sous la forme

$$A_\mu = \sum_{i=0}^{p^h-1} (1+T)^i \varphi^h(A_{\mu_i}), \qquad \text{avec } \mu_i \in \mathscr{D}^{(0)}.$$

Il résulte du lemme 7 que $A_{\mu_i} = \psi^h((1+T)^{-i}A_\mu)$, et on cherche à prouver que

$$A_\mu \in \mathscr{O}_L[T]^{(h)} \iff A_{\mu_i} \in \mathscr{O}_L[T]^{(0)} \text{ pour tout } i.$$

---

2. Si $N = a_0 + pa_1 + \cdots + p^r a_r$ avec $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, on a $v_p(N!) = \frac{N - S(N)}{p-1}$, avec $S(N) := a_0 + a_1 + \cdots + a_r$.

3. Complété de l'anneau des puissances divisées partielles relativement à l'idéal (p, T) de $\mathscr{O}_L[T]$.

L'implication $\Leftarrow$ resulte du lemme 6 et l'implication $\Rightarrow$ (plus délicate) fait l'objet du lemme 10 (pour $n = h$ dans les notations de ce lemme). $\square$

3. Estimées pour l'action de ψ

Lemme 6. — *Si $f \in L[[T]]$ et si $h \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- $f \in \mathscr{O}_L[T]^{(h)}$,
- $\varphi(f) \in \mathscr{O}_L[T]^{(h+1)}$.

Démonstration. — Les deux conditions sont équivalentes à $f(T^p) \in \mathscr{O}_L[T]^{(h+1)}$: évident pour la première et, pour la seconde, résulte de ce que $\varphi(T) - T^p \in p\mathscr{O}_L[T]$. $\square$

Si $s \geq 0$, notons $\mathscr{O}(s) \subset L[[T]]$ l'anneau des séries convergeant sur $B(0,s) := \{z,\ v_p(z) \geq s\}$.

Lemme 7. — *Soit $r \leq \frac{p}{p-1}$.*

(i) *Si $F \in \mathscr{O}(p^{-1}r)$, il existe $\psi(F) \in \mathscr{O}(r)$, unique, telle que*

$$\tfrac{1}{p}\textstyle\sum_{\zeta^p=1} F((1+T)\zeta - 1) = \psi(F)((1+T)^p - 1)\ \big[= \big(\varphi(\psi(F))\big)(T)\big]$$

(ii) *Si $F \in \mathscr{O}(p^{-1}r)$, il existe $G_i \in \mathscr{O}(r)$ pour $0 \leq i \leq p-1$, uniques, tels que $F = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(G_i)$, et on a $G_i = \psi((1+T)^{-i}F)$.*

(iii) *Si $F \in \mathscr{O}(p^{-h}r)$ avec $h \geq 1$, et si $G_i \in \mathscr{O}(r)$ pour $0 \leq i \leq p^h - 1$ sont telles que $F = \sum_{i=0}^{p^h-1}(1+T)^i\varphi^h(G_i)$, alors $G_i = \psi^h((1+T)^{-i}F)$.*

Démonstration. — $x \mapsto (1+x)^p - 1$ fait de $B(0, p^{-1}r)$ un revêtement étale de $B(0,r)$, de groupe de Galois $\boldsymbol{\mu}_p$, l'action de $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_p$ étant $z \mapsto (1+z)\zeta - 1$. D'où le (i).

Pour le (ii), l'unicité des G_i et la formule découlent du fait que $(1+T)^i$ est vecteur propre de $\boldsymbol{\mu}_p$ pour le caractère $\zeta \mapsto \zeta^i$.

Enfin, le (iii) se déduit du (ii) par une récurrence facile. $\square$

Lemme 8. — *Si $n \geq 0$, et si*

$$\sum_{k\geq 0} a_{n,k}\frac{T^k}{k!} = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{(\zeta(1+T)-1)^n}{n!}\ \Big[= \varphi\Big(\psi\Big(\frac{T^n}{n!}\Big)\Big)\Big]$$

alors $a_{n,k} \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. — On a $a_{n,k} = 0$ si $k > n$ et $a_{n,k} = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{(\zeta-1)^{n-k}}{(n-k)!}\zeta^k$ si $k \leq n$. Si $k = n$, on a $a_{n,k} = 1$; si $k < n$ le terme pour $\zeta = 1$ est 0 et les autres sont les conjugués d'un élément de $\mathbf{Z}_p[\boldsymbol{\mu}_p]$ de valuation

$$(n-k)v_p(\zeta_p - 1) - v_p((n-k)!) = \frac{n-k}{p-1} - \frac{(n-k) - S(n-k)}{p-1} = \frac{S(n-k)}{p-1} > 0$$

Il s'ensuit que la somme Σ appartient à $\mathbf{Z}_p$ et $v_p(\Sigma) > 0$, et donc $a_{n,k} = \frac{1}{p}\Sigma \in \mathbf{Z}_p$, ce que l'on cherchait à établir. $\square$

Lemme 9. — *Si $k < n$, alors*

$$v_p\Big(\frac{k!}{\lfloor k/p^h\rfloor!}\Big) \leq v_p\Big(\frac{n!}{\lfloor n/p^h\rfloor!}\Big)$$

Démonstration. — Notons $f(k)$ le membre de gauche ; l'énoncé est équivalent à ce que $k \mapsto f(k)$ soit croissante. Or

$$f(k+1)-f(k)=\begin{cases} v_p(k+1) & \text{si } p^h \nmid k+1,\\ h+v_p(a)-v_p(a)=h & \text{si } k+1=p^h a.\end{cases}$$

On a donc $f(k+1)-f(k)\geq 0$ dans tous les cas ; d'où le résultat. □

Lemme 10. — *Si $h \geq n \geq 1$, alors $\psi^n(\mathscr{O}_L[T]^{(h)}) \subset \mathscr{O}_L[T]^{(h-n)}$.*

Démonstration. — Le cas général se déduit du cas $n=1$ par une récurrence immédiate, et le cas $n=1$ est une conséquence des lemmes 8 et 9 qui permettent de prouver que $\varphi(\psi(\mathscr{O}_L[T]^{(h)})) \subset \mathscr{O}_L[T]^{(h)}$, et du lemme 6. □

Références

[1] Y. Amice, Interpolation p-adique, Bull. SMF **92** (1964), 117–180. 3

[2] Y. Amice, Duals. Proc. of a conf. on p-adic analysis (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978. 3

[3] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique, Astérisque **330** (2010), 13–59. 3

[4] K. Mahler, An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable, J. reine angew. Math. **199** (1958), 23–34. 2

Pierre Colmez, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

Shanwen Wang, School of mathematics, Renmin University of China, 59 ZhongGuanCun Street, 100872 Beijing, P.R. China • *E-mail :* s_wang@ruc.edu.cn